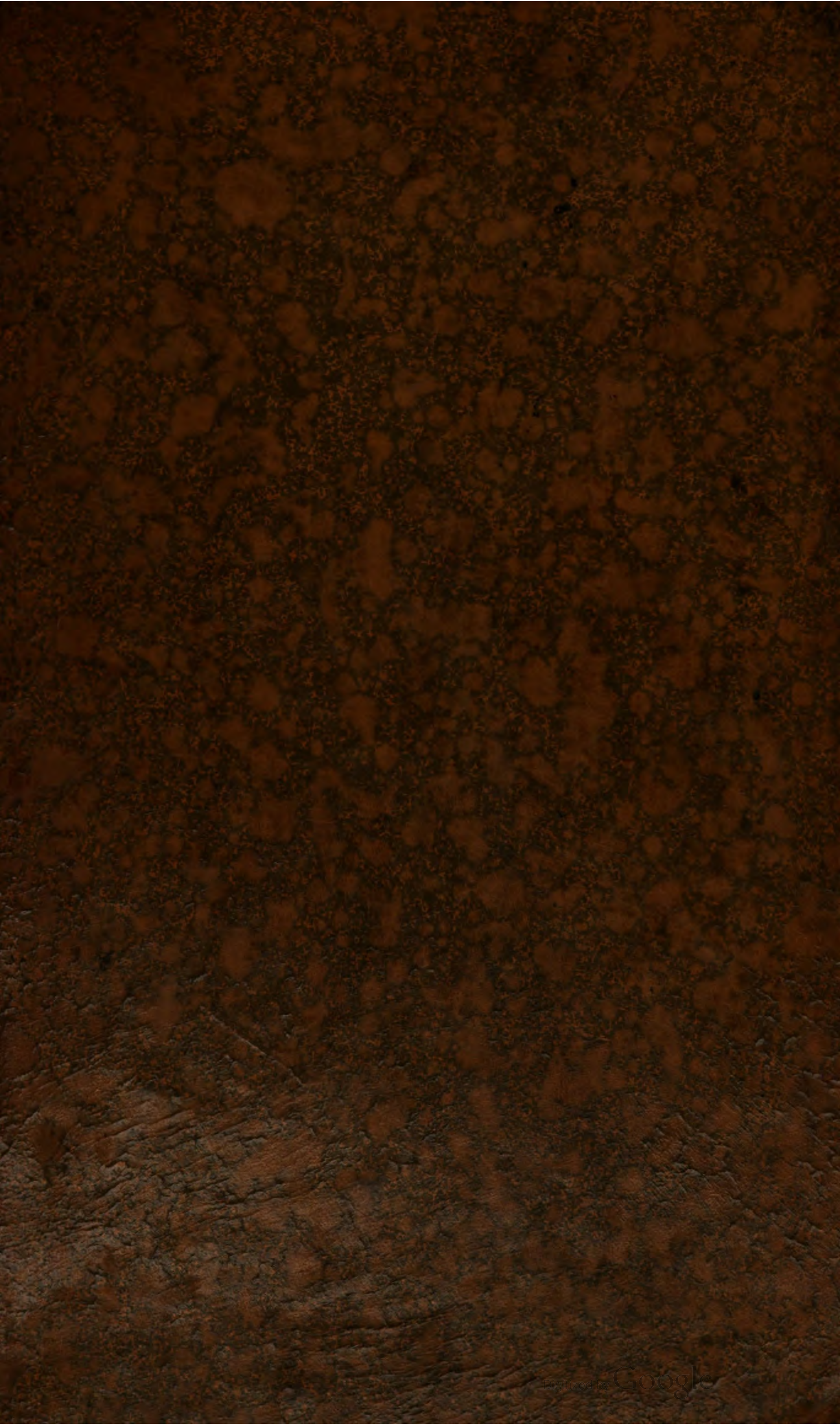
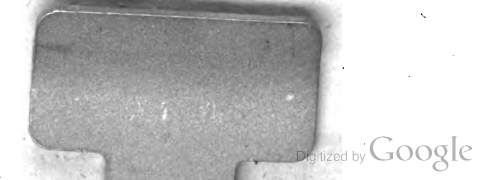
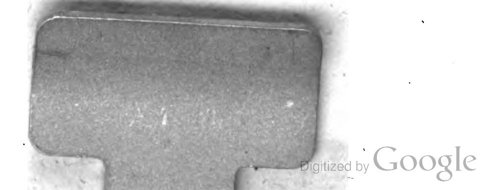






PRINCIPES D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE;

OU

TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE:

Dans lequel on a réuni les Solutions numériques, géométriques & analytiques de tous les Problêmes qui ont rapport à la résolution des Triangles sphériques quelconques;

Avec une Théorie des différences des mêmes Triangles.

Par M. MAUDUIT, Professeur de Mathématiques.



A PARIS,
Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR, rue S. Jacques, à S. Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

PRÉFACE.

La plupart des Traités de Trigonométrie ſphérique qui ont paru juſqu'ici, n'ont eu pour objet que d'enſeigner à réſoudre les triangles ſphériques par des proportions. Je n'en connois point qui ait réuni les différentes ſolutions dont les problêmes de cette partie des Mathématiques ſont ſuſceptibles.

Pour peu qu'on y faſſe attention, on en trouvera de trois eſpeces. Les unes ſe réduiſent aux analogies, & ſont particuliérement aſſujetties aux Logarithmes qui en rendent la pratique de la plus grande ſimplicité : ces ſolutions ſe trouvent dans tous les Traités ordinaires de Trigonométrie ſphérique. Celles de la ſeconde eſpece ne ſont autre choſe que des conſtructions géométriques, par leſquelles, avec la regle & le compas, on peut aiſément trouver toutes les parties d'un triangle à réſoudre. On les a nommées *graphiques*, parce qu'on y emploie différentes projections ou développements du triangle. Quoique leur préciſion ſoit de beaucoup au-deſſous de celle que donne le calcul, elles peuvent néanmoins être d'uſage dans un grand nombre de circonſtances; & d'ailleurs elles ne ſont pas moins rigoureuſes aux yeux du Géometre, dont les raiſonnements ſont indépendants de la perfection des figures qu'il conſidere. Ces ſolutions ſont ſouvent

employées par les Aſtronomes dans les éclipſes, ou dans les paſſages des planetes inférieures ſur le diſque du Soleil. Les Géographes en ſuppoſent toujours les connoiſſances dans leurs repréſentations des différentes portions du globe ſur une ſurface plane. La Gnomonique n'eſt elle-même qu'une application preſque continuelle de ces projections. Mais le but que je me ſuis particuliérement propoſé dans le détail que je donne ici de ces conſtructions, a été de faire, en quelque façon, découvrir la Trigonométrie tant ſphérique que rectiligne, par l'application de l'analyſe algébrique à ces ſolutions graphiques; ce qui conſtitue la troiſieme eſpece de ſolutions qu'on pouvoit deſirer ſur les problêmes de cette nature. La généralité des formules & la facilité de les découvrir, donne à cette partie l'avantage de réunir ſous un même point de vue toutes les analogies qu'on peut deſirer ſur chaque cas particulier; & la comparaiſon des ſolutions qu'elle nous donne avec celles des Anciens, ne la rend que plus curieuſe & plus intéreſſante.

Telles ſont les différentes ſolutions que je m'étois propoſé de réunir dans ce petit Traité. J'ai cru devoir y joindre encore une autre partie relative à ce travail, & qui peut être fort utile à ceux qui ſe deſtinent à étudier les différents Traités de Mathématiques pures ou d'Aſtronomie phyſique. L'avantage de trouver des ſolutions toutes approchées dans les tables des Sinus & des Logarithmes, lorſqu'on ne peut en

espérer aucune d'exacte & rigoureuse, a engagé les Géometres à réduire presque tous leurs problêmes à ces sortes de Tables. Il s'est donc introduit depuis l'analyse de DESCARTES, & les sublimes découvertes des Géometres qui lui ont succedé, un nouveau genre de calcul; par *sinus*, *cosinus*, *tangentes*, *cotangentes*, *logarithmes*, *&c*, dont on suppose les principes connus de ceux qui lisent les ouvrages de nos Géometres. J'ai tâché d'en réunir les notions élémentaires dans le premier Chapitre de cet Ouvrage, & de leur donner le plus d'étendue possible, en multipliant considérablement toutes les formules, & les suites infinies qui renferment les principales propriétés.

Comme on a souvent employé les imaginaires dans les suites relatives aux diverses fonctions des sinus & cosinus d'arcs multiples, j'ai profité de cette occasion pour insérer une notion précise de ces expressions, qui fixe l'espece d'absurdité qui y donne lieu. Pour traiter encore avec plus d'évidence cette Théorie des imaginaires, j'ai cherché à la démontrer par l'analyse, en tâchant de découvrir les facteurs du binome $aa + bb$; & comme c'est la solution de ce problême général qui nous conduit immédiatement aux imaginaires, il est aisé d'en conclure qu'elles ne sont autre chose qu'une expression absurde à laquelle on arrive nécessairement toutes les fois que l'on regarde comme produit ce qui n'en est pas un. Je dois ces principes à feu M. BOISELOU,

dont les Savants regrettent encore la perte assez récente. Cette Théorie appartiendroit plus sans doute aux Eléments d'Algebre pure; mais comme nous pourrons être encore long-temps sans avoir un Cours vraiment complet en ce genre, j'ai cru qu'on ne seroit pas fâché de trouver ici ces vérités fondamentales. On verra sur la fin de l'Ouvrage des applications assez curieuses de ces recherches à la résolution des équations du troisieme & quatrieme degré par le cercle.

Peut-être se trouvera-t-il quelques personnes qui regarderont cette partie de l'Ouvrage, comme un étalage inutile de formules algébriques dans un Traité de Trigonométrie sphérique. Je crois être en droit de les prier de suspendre leur jugement, au moins jusqu'à ce qu'ils ayent entrepris l'étude des différents ouvrages de calcul relatifs à la Théorie de Newton. L'Astronomie est devenue une science si délicate qu'on ne sauroit avoir trop de moyens de simplifier les calculs qu'elle entraîne, & de perfectionner les diverses parties dont elle dépend. Au reste, ceux qui ne se destinent pas d'une maniere particuliere à cette étude, pourront se contenter des cinq ou six premiers Théorêmes du premier Chapitre. Comme j'ai tâché de réunir dans un même ouvrage la pratique la plus facile & la plus simple avec une Théorie beaucoup plus étendue, j'ai eu soin de disposer les matieres, de maniere que ceux qui ne posséderoient que leurs élé-

ments, puſſent entendre ſans aucune difficulté tout ce qui conſtitue la Trigonométrie ſphérique proprement dite, qui ſe réduit aux deux Chapitres ſuivants.

Je démontre dans le ſecond Chapitre les principales propriétés des Triangles ſphériques, après avoir expoſé les notions générales qui y ont rapport; & c'eſt la premiere des trois Sections dans leſquelles ce Chapitre eſt diviſé. La ſeconde a pour objet la réſolution des triangles ſphériques rectangles. Comme cette partie eſt d'un uſage continuel, je me ſuis appliqué à lui donner la plus grande ſimplicité dont elle pût être ſuſceptible. Chaque Théorême n'a beſoin que d'une analogie pour être démontré. Pour aider encore davantage à retenir les différentes ſolutions, j'ai ajouté la démonſtration du Théorême général de Néper, qui réduit les ſeize cas des triangles rectangles à deux, & qui n'a beſoin que de l'énumération de ces mêmes cas, dont chacun ſe vérifie ſur le champ par une ſeule analogie.

La troiſieme Section renferme la réſolution de tous les cas des triangles ſphériques obliquangles. J'y joins un Théorême analogue à celui de Néper ſur les triangles rectangles, & qui eſt le même que M. Pingré a donné dans les Mémoires de l'Académie. J'y ai néanmoins fait quelques changements que j'ai cru propres à le rendre encore plus ſimple. Outre les ſolutions déja connues du cas des trois côtés ou des trois angles, j'en ai donné pluſieurs autres que je

crois nouvelles. On ne peut s'empêcher, en étudiant les Traités ordinaires de Trigonométrie, d'être surpris que l'on cherche un angle par le sinus de sa moitié. Ce choix semble bisarre : pourquoi n'y emploie-t-on pas le sinus ou cosinus tout entier de ce même angle, ou sa tangente ou sa cotangente ? L'énumération complette des différentes solutions que je donne ici, pouvoit seule justifier cette pratique. Elle nous apprend en effet que de toutes les formules qu'on pouvoit desirer, elle est la plus simple, ainsi que celle du cosinus de la même moitié de l'angle cherché. Les applications de ces formules à la Trigonométrie rectiligne donnent aussi des solutions beaucoup plus faciles que celle qu'on trouve dans tous les Eléments.

Cette Section est terminée par une démonstration complette des fameuses analogies de NÉPER, qui ont été défigurées & altérées dans le Cours de M. WOLF. Il paroît que NÉPER s'étoit proposé de ramener la Trigonométrie sphérique à la rectiligne, afin de donner un moyen de retenir aisément toutes ces solutions: mais il est plus naturel de déduire la Trigonométrie rectiligne des formules générales pour les différents cas des triangles sphériques. Les démonstrations de ces Théorêmes en amenent plusieurs autres également généraux, dont M. SIMPSON n'a donné que des cas particuliers. Ce Chapitre contient tout ce qui est essentiel à la résolution des triangles sphériques ; & ceux qui ne voudroient apprendre que cette partie

de la Géométrie, peuvent n'étudier que ce Chapitre seul, & passer tout de suite au sixieme, où j'ai réuni quelques exemples en nombres relatifs aux différents cas, pour montrer aux Commençants la maniere de pratiquer les formules sur les Logarithmes.

Le troisieme Chapitre a pour objet les solutions géométriques ou graphiques de différents cas que l'on vient de résoudre par analogies. Je me suis servi de préférence des projections ortographiques, dont les Astronomes supposent à chaque instant une Théorie complette. J'y ai joint aussi quelque chose sur les projections stéréographiques, à cause de leur grand usage dans les cartes de Géographie ; enfin je donne encore une autre solution facilement applicable à tous les cas, & déduite du développement des parties du triangle à résoudre.

Le quatrieme Chapitre n'est qu'une application de l'analyse algébrique aux constructions géométriques du Chapitre précédent. C'est dans cette partie qu'à l'aide du calcul on épuise en quelque sorte toutes les solutions particulieres à chaque cas. Toutes les analogies du second Chapitre se déduisent par de simples substitutions ; une foule de nouvelles formules se joignent à celles que l'on connoissoit déja. On peut, sans craindre de s'égarer, commencer par les cas les plus généraux, en suivant une route opposée à celle qu'on avoit tenu jusques-là. On arrive aussi à des solutions, qui d'abord paroissent essentiellement différentes de celles

qui ont été trouvées pour les mêmes cas. Une expreſſion fort compliquée d'un problême aſſez ſimple feroit preſque ſupçonner une mal-adreſſe dans les ſolutions algébriques ; mais on en découvre bien-tôt l'accord & l'identité, & l'on en déduit des pratiques heureuſes de conſtruire de la maniere la plus ſimple des expreſſions aſſez difficiles. Comme on peut ſouvent trouver dans différentes queſtions aſtronomiques des formules ſemblables à celles que l'analyſe nous a fait découvrir, j'enſeigne la maniere de ramener les plus compliquées aux Logarithmes. Je donne enſuite la ſolution des équations du ſecond & troiſieme degré par les Tables des Sinus ; ce qui peut être de la plus grande commodité, lorſque l'on ne doit point eſpérer de racines commenſurables. Les réſolutions du troiſieme degré m'ont été communiquées par un Magiſtrat déja connu avantageuſement par différents Ouvrages, & moins eſtimable encore par ſes connoiſſances profondes que par l'excellence de ſon caractere. Je lui dois auſſi la ſolution nouvelle du Problême du plus court crépuſcule que j'ai inferé dans le cinquieme Chapitre qui ſuivra celui-ci.

Cette partie de l'Ouvrage n'eſt autre choſe qu'une traduction de l'excellent morceau de M. Côtes, intitulé: *De æſtimatione errorum in mixtâ Matheſi*, c'eſt une application de l'analyſe moderne ou du calcul des fluxions à l'une & à l'autre Trigonométrie. J'ai déduit tout ce qui a rapport aux triangles rectilignes des formules des

triangles sphériques, afin de simplifier encore la Théorie, & d'abréger, le plus qu'il m'étoit possible, un Ouvrage qui devenoit beaucoup plus long que je ne m'étois proposé d'abord. Cette Théorie est suffisamment éclaircie par des applications à différents exemples en nombres.

Le sixieme Chapitre n'est qu'une collection de différents problêmes d'Astronomie sphérique, pour montrer la maniere d'appliquer ou de construire par les Logarithmes les différentes formules des Chapitres précédents. J'ai cru qu'il seroit plus agréable d'appliquer ces solutions à des dénominations ainsi déterminées, que de résoudre des triangles, pour ainsi dire, abstraits. Comme les principes de la sphere sont suffisamment connus de la plupart des jeunes gens qui ont fait une bonne Philosophie, je me suis permis de faire différentes applications soit des constructions géométriques, soit des solutions numériques aux principaux cercles de la sphere ; & c'est ce qui m'a déterminé à donner à cet Ouvrage le titre de Principes d'Astronomie sphérique.

Pour rendre encore la pratique des calculs plus simple & plus facile, j'ai fait joindre à ce Traité trois Tables qui renferment le précis de l'Ouvrage entier, au moins quant à la pratique la plus ordinaire. Au lieu de désigner les parties des triangles à résoudre par des lettres, j'ai mieux aimé les exprimer par les données mêmes du Problême; ce qui m'a paru plus commode, & moins sujet à erreur dans les calculs.

La premiere Table eſt pour la réſolution des triangles ſphériques rectangles : la ſeconde pour les obliquangles : la troiſieme eſt auſſi deſtinée à la réſolution des cas des triangles obliquangles ; mais par les analogies de NÉPER, elle s'applique également aux triangles rectilignes quelconques. Elle peut avoir de plus ce grand avantage, que par la parfaite analogie qui regne entre ces deux eſpeces de Triangles pour les réſolutions des cas ſemblables : on peut apprendre la Trigonométrie ſphérique en un quart-d'heure, lorſqu'on ſait déja les proportions pour les triangles rectilignes.

Il me reſte à dire un mot du motif qui m'a déterminé à entreprendre ce petit Traité. Ayant été dans le cas d'enſeigner les Eléments d'Aſtronomie de feu M. l'Abbé DE LA CAILLE, le petit Traité de Trigonométrie qui eſt à la tête de ſon Ouvrage, m'a donné l'idée de celui que je publie aujourd'hui. Comme un grand nombre des formules qu'il a données, ſe trouvent ſans démonſtration, & que les Commençants aiment toujours d'aſſûrer leur marche dans l'étude des vérités Mathématiques ; j'ai cru me rendre utile en leur donnant un ſecours dont la plupart ne peuvent ſe paſſer.

Il y a plus, ce Traité étant le ſeul qui réunit les différentes eſpeces de ſolutions dont je viens de parler, ſi l'on en excepte les ſolutions géométriques, étoit auſſi le plus complet que nous euſſions ſur cette partie. Je ſouhaite que celui-ci réponde au but que je me ſuis propoſé.

S'il peut mériter le ſuffrage du Public, il ſera ſuivi d'un autre ſur la Gnomonique, qui en feroit une ſeconde Partie. C'eſt particuliérement dans cette partie des Mathématiques que la Trigonométrie ſphérique s'applique le plus heureuſement. Les deſcriptions des Cadrans par des lignes ſont trop peu exactes pour mériter une certaine confiance. Nous n'avons point encore de Traité de Gnomonique où tout ait été ſoumis au calcul des triangles ſphériques. Cependant cette Théorie ſeroit de la plus grande importance dans la pratique, & la généralité des ſolutions les rend encore plus intéreſſantes, en ce que les différents angles horaires qu'on ne calcule communément que par une ſuite de triangles, lorſqu'on n'y emploie que la Trigonométrie rectiligne, peuvent être déterminés indépendamment les uns des autres par le moyen des triangles ſphériques.



EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royal des Sciences.

Du 27 Juin 1764.

MESSIEURS CLAIRAUT & PINGRÉ qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. MAUDUIT, intitulé : *Principes d'Aſtronomie ſphérique*, ou *Traité complet de Trigonométrie ſphérique*, &c, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet Ouvrage étoit concis ſans obſcurité ; méthodique ſans affectation ; propre à faciliter les ſuccès de ceux qui s'occupent de l'étude de la Trigonométrie ſphérique, ou qui en veulent appliquer les principes aux autres Sciences Mathématiques, & qu'il méritoit d'être imprimé avec ſon Approbation & ſous ſon Privilege : en foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Paris le 29 Juin 1764.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secr. perp. de l'Academie Roy. des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout

ce qui aura été fait dans les Assemblés de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Traités ou Mémoires de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & qu'ils seront jugés dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caractères, conjointement, ou séparément & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il puisse en être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un en celle de notre Châtean du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité desdites Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secre-

taires, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre Regne le trente cinquieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, MOL.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430, folio 309, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article 4, à toutes personnes, de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108 du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

PRINCIPES



PRINCIPES D'ASTRONOMIE *SPHÉRIQUE.*

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires sur les différentes lignes que l'on considere dans la Trigonométrie, & dont nous ferons un usage plus fréquent dans cet Ouvrage.

Définitions.

Art. 1. On appelle *Sinus* d'un arc AM ou d'un angle ACM une droite MP abaissée d'une des extrémités de cet arc perpendiculairement au rayon qui passe par l'autre extrémité (*fig.* 1).

2. D'après cette définition il est aisé de voir que la droite MQ est le sinus de l'arc BM complément de l'arc

AM; cette ligne considérée par rapport à l'arc AM, est appellée son *Cosinus*.

3. Une droite AT perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, & terminée au rayon prolongé qui passe par l'autre extrémité M d'un arc AM, se nomme *Tangente* de cet arc.

4. Une droite B*t* tangente de l'arc BM complément de l'arc AM considérée par rapport au même arc AM, se nomme *Cotangente* de cet arc.

5. La partie du rayon comprise entre le centre du cercle & la tangente d'un arc, se nomme *Sécante* de cet arc; ainsi CT est la sécante de l'arc AM, & C*t* est la sécante de l'arc BM. Si l'on considere la sécante C*t* par rapport à l'arc AM qui est le complément de l'arc BM auquel elle appartient, cette ligne sera nommée la *Cosécante* de l'arc AM.

6. La partie du rayon comprise entre la circonférence & le sinus d'un arc, s'appelle son *Sinus-verse*; ainsi AP est le sinus-verse de l'arc AM, & BQ le sinus-verse de l'arc BM. *a*P & *b*Q sont les sinus-verses des angles obtus *a*CM, *b*CM. Si l'on considere le sinus-verse BQ en tant qu'il appartient à un arc qui est le complément de AM, on le nommera *Cosinus-verse* de l'arc AM, & réciproquement AP sera le cosinus-verse de l'arc BM.

Corollaire.

7. Il suit des définitions précédentes que deux angles suppléments l'un de l'autre ont le même sinus, le même cosinus, la même tangente, la même cotangente, la même sécante, la même cosécante, & les mêmes sinus-verses. Seulement il est à remarquer que pour l'angle obtus, il faut regarder comme complément de cet angle l'angle qu'il faut en retrancher pour avoir un droit; lequel angle est évidemment le même que celui qu'on ajoute à l'angle aigu. Ainsi ce complément est à soustraire.

AVERTISSEMENT.

8. Dans toute la suite de cet Ouvrage nous désignerons toujours le rayon du cercle par R ou *r*; quelquefois on le suppose égal à l'unité, mais il est mieux de l'exprimer, afin de conserver autant qu'on peut l'homogénéité des termes dans les calculs. De même nous désignerons toujours le sinus d'un arc par *sin*; son cosinus par *cos.* sa tangente par *tang.* sa cotangente par *cot.* sa sécante par *sec.* sa cosécante par *cosec.* son sinus-verse par *sin. vers.* & son cosinus-verse par *cos. vers.* Dans les expressions algébriques, nous ferons le sinus $= s$; le cosinus $= c$; la tangente $= t$; la cotangente $= \tau$; la sécante $= S$ & la cosécante $= f$. le sinus-verse $= v$, & le cosinus-verse $= u$.

THÉOREME I.

9. *Soit un arc de cercle quelconque* AM (*fig.* 1.) *que nous désignerons toujours par* A *dont* PM *est le sinus &* MQ *le cosinus*; AT *la tangente*, *&* Bt *la cotangente*; *je dis que le cosinus est au sinus comme le rayon est à la tangente*, *c'est-à-dire*, que l'on aura *cosin* A : *sin* A : : R : *tang* A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles semblables CPM, CAT, donnent CP : PM : : CA : AT; ou *cos* A : *sin* A : : R : *tang* A. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

10. Les triangles CQM, CB*t* étant aussi semblables donneront CQ : QM : : CB : B*t* ou *sin* A : *cos* A : : R : *cot* A.

COROLLAIRE II.

11. Il suit delà que $tang\, A = \frac{sin\, A}{cos\, A} \times R$, & que *cot* A

$= \frac{cos A \times R}{sin A}$ ou algébriquement $t = \frac{sr}{c}$ & $\tau = \frac{cr}{s}$. D'où l'on tire encore $sin A \times R = cos A \times tang A$, & $cos A = \frac{sin A \times tang A}{R}$.

COROLLAIRE III.

12. Il suit encore delà que les cotangentes d'une suite d'arcs quelconques sont toujours en raison inverse des tangentes des mêmes arcs ; puisque l'on a évidemment $t : \tau :: \frac{sr}{c} : \frac{cr}{s} :: \frac{s}{c} : \frac{c}{s}$. En un mot on aura $tang A = \frac{RR}{cotang A}$, d'où il suit que $tang A \times cot A = RR$, d'où l'on voit que le rayon est moyen proportionnel entre la tangente d'un arc & celle de son complément ; ce qui pourroit encore se démontrer sur le champ par les triangles semblables CAT, CB*t*.

THÉOREME II.

13. *Soit toujours un arc quelconque* AM ; *je dis que l'on aura cette proportion ; Le rayon est au double du sinus de l'arc* AM, *comme le cosinus de cet arc est au sinus de l'arc double. Ou, ce qui revient au même*, (fig. 2.) $R : 2 sin A :: cos A : sin 2A$ ou *alternando* ; $R : cos A :: 2 sin A : sin 2A$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles APC, AQN ayant un angle commun en A, sont semblables & donnent AC : CP :: AN ou 2 PA : QN ; c'est-à-dire, $R : cos A :: 2 sin A : sin 2A$; *C. Q. F. D.*

Si l'on vouloit avoir pareillement l'expression du cosinus de l'arc double, les triangles semblables CPA, CQO donneront CA : CP :: CO : CQ, d'où l'on tirera sur le champ $CQ = \frac{2 cos^2 A - RR}{R}$ en mettant pour CO sa valeur tirée de ce que OP = PT.

COROLLAIRE IV.

14. Il suit delà que l'on aura $\frac{1}{2}$ *sin* 2A $= \frac{cos\,A \times sin\,A}{R}$. Cette équation n'est autre chose que celle qui se tire en prenant le produit des extrêmes & des moyens de la derniere proportion. Si l'on met pour *cos* A sa valeur $\frac{sin\,A \times cot\,A}{R}$, on aura encore $\frac{1}{2}$ *sin* 2A $= \frac{sin^2\,A \times cot\,A}{RR}$, ou $\frac{1}{2}$ *sin* 2A $= \frac{sin^2\,A}{tang\,A}$ en substituant la tangente à la cotangente.

THÉOREME III.

15. *Le rayon est moyen proportionnel*, 1°, *entre le cosinus d'un arc & la sécante ; 2°, entre le sinus du même arc & la sécante de son complément* (fig. 3) ; *c'est-à-dire*, que l'on aura ces deux analogies ; *cos* A : R : : R : *sec* A : & *sin* A : R : : R : *cosec* A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles semblables CPM, CAT, CB*t* donnent 1°, CP : CA : : CM : CT ou *cos* A : R : : R : *sec* A. 2°, PM : CM : : CB : C*t* ou *sin* A : R : : R : *cosec* A. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

16. Il suit delà que l'on aura $\frac{sec\,A \times R}{cosec\,A} =$ *tang* A. Car on a vu ci-devant (n°. 11) que *tang* A $= \frac{sin\,A}{cos\,A} \times R$. Or cette quantité est aussi le quotient de *sec* A divisée par *cosec* A, & multipliée par le rayon.

COROLLAIRE II.

17. Il suit encore delà que si l'on a deux arcs de cercle A & B, les sinus de ces arcs seront réciproquement proportionnels aux sécantes de leurs compléments, & les cosinus de ces mêmes arcs seront réciproques à leurs

ſécantes ; car puiſque $coſec\ A = \frac{RR}{ſin\ A}$, on aura auſſi $coſec\ B = \frac{RR}{ſin\ B}$; & de même puiſque $ſec\ A = \frac{RR}{coſin\ A}$ on aura auſſi $ſec\ B = \frac{RR}{coſ\ B}$; donc on aura ces deux analogies, $Coſec\ A : coſec\ B :: \frac{RR}{ſin\ A} : \frac{RR}{ſin\ B} :: ſin\ B : ſin\ A$; & $ſec\ A : ſec\ B :: \frac{RR}{coſ\ A} : \frac{RR}{coſ\ B} :: coſ\ B : coſ\ A$.

Théoreme IV.

18. *Soient diviſés l'arc* AM *& ſon complément* BM *en deux parties égales aux points* K *&* k, *& ſoient tirées les lignes* CKl, CkL *juſqu'à ce qu'elles rencontrent les tangentes* AT & Bt *prolongées, autant qu'il ſera néceſſaire, en* l *&* L ; je dis que l'on aura 1°, $ſec\ A = cot\ \frac{1}{2}\ comp.\ A - tang\ A$; 2°, $coſec\ A = cot\ \frac{1}{2}\ A - cot\ A$.

Démonstration.

Les triangles rectangles CB*o* & CAL étant ſemblables à cauſe des paralleles, on aura l'angle ALC = l'angle BC*o* ; mais BC*o* = *o*CM (par conſtruction). Donc le triangle CTL eſt iſoſcele, donc on aura LT = CT ; mais $LT = AL - AT = cot\ \frac{1}{2}\ comp\ AM$ & $AT = tang\ AM$; donc 1°, CT ou $ſec\ A = cot\ \frac{1}{2}\ comp\ A - tang\ A$. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2. Les triangles CAO & CB*l* rectangles étant ſemblables à cauſe des paralleles CA & B*l*, on aura l'angle B*l*C = ACO ; mais ACO = MCO (par conſt.) donc le triangle C*tl* eſt iſoſcele ; donc la coſécante C*t* = *tl* ; de plus il eſt viſible que $tl = Bl - Bt = cot\ \frac{1}{2}\ A - cot\ A$. Donc auſſi la coſécante C*t* de l'arc AM eſt égale à cette même quantité. *C. Q. F.* 2° *D.*

Théoreme V.

19. *Du point* M *aux extrémités* b, a (fig. 3) *des diametres* Bb, Aa ; *ſoient menées les lignes* Mb, Ma *qui*

coupent les rayons CA *&* CB *aux points* G *&* g; *ſoit de plus mené par le même point* M *la perpendiculaire* $\theta M\tau$ *terminée aux rayons* CA *&* CB *prolongés, autant qu'il ſera néceſſaire, en* θ & τ, *& ſur leſquels elles déterminent les lignes* $C\theta$ *&* $C\tau$ *reſpectivement égales à la ſécante & à la coſécante de l'arc* AM : *Cela poſé, je dis* que l'on aura 1°, *ſecant* A = *tang* A + *cotang* $\frac{1}{2}$ *comp* A. 2°, *coſec* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A.

Démonstration.

L'angle $bM\theta$ étant formé par une tangente $M\theta$ & par la corde Mb, a pour meſure la moitié de l'arc MAb compris entre ſes côtés; & l'angle $MG\theta$ qui a ſon ſommet au dedans de la circonférence, a pour meſure la demi-ſomme des arcs ab, AM compris entre ſes côtés, mais $ab = Ab$; ainſi cet angle eſt égal à l'angle $GM\theta$, donc le triangle $G\theta M$ eſt iſoſcele, & par conſéquent $G\theta = M\theta =$ *tang* A. De plus, l'angle CbG étant à la circonférence n'eſt que la moitié de l'angle BCM qui a ſon ſommet au centre, & qui eſt appuyé ſur le même arc; donc ſi on regarde le rayon Cb comme le ſinus total, CG ſera la tangente du demi-complément de l'arc AM; donc la *ſec* $C\theta = CG + G\theta =$ *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A + *tang* A. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. On prouvra précisément de la même maniere que $g\tau = M\tau =$ *cot* A, & que $Cg =$ *tang* $\frac{1}{2}$ A. D'ailleurs il eſt viſible que $C\tau =$ *coſec* A; donc on aura *coſec* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

20. Il ſuit des deux théorêmes précédents que l'on aura 1°, *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* A — *tang* A = *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A + *tang.* A. 2°, *Cot* $\frac{1}{2}$ A — *cot* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A; en comparant les deux expreſſions des ſécantes & coſécantes de l'arc AM; d'où il ſuit qu'on aura auſſi 2 *tang* A = *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* A — *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A; & encore 2 *cot* A

$= cot \frac{1}{2} A - tang \frac{1}{2} A$. Et si à la place de cotang. dans le second membre de chaque équation on met sa valeur $\frac{RR}{tang}$ (n°. 12), on aura $tang\ A = \frac{RR - tang^2 \frac{1}{2} comp\ A}{2\ tang \frac{1}{2} comp\ A}$ & $cot A = \frac{RR - tang^2 \frac{1}{2} A}{2\ tang \frac{1}{2} A}$. D'où il est facile de déduire les deux analogies suivantes.

$2\ Tang \frac{1}{2} comp\ A : R + tang \frac{1}{2} comp\ A :: R - tang \frac{1}{2} comp\ A : tang\ A$.

Et $2\ tang \frac{1}{2} A : R + tang \frac{1}{2} A :: R - tang \frac{1}{2} A : cot\ A$. La premiere de ces deux analogies peut encore se changer en celle-ci. $2\ Tang\ (45° - \frac{1}{2} A) : R + tang\ (45° - \frac{1}{2} A) :: R - tang\ (45° - \frac{1}{2} A) : tang\ A$.

THÉOREME VI.

21. *Soit toujours un arc quelconque* AM *décrit d'un rayon* CA, *je dis* que l'on aura 1°, $1 + cos\ A = 2 cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{sin\ A \times R}{tang \frac{1}{2} A}$; 2°, $1 - cos\ A = 2 sin^2 \frac{1}{2} A = sin\ A \times tang \frac{1}{2} A$; en faisant le rayon = à l'unité.

DÉMONSTRATION.

Soit d'abord tirée par les extrémités B, M (*fig.* 4) du diametre AB, & de la corde AM la corde BMT terminée à la tangente de l'arc AM en un point T, & soient encore menées par le centre C les droites CK & CL respectivement paralleles aux droites BM & AM : il est visible que AT sera le double de la tangente de la moitié de l'arc AM; CD ou ML ou LB seront le cosinus de la moitié du même arc.

Cela posé, les triangles semblables BLC, BPM donneront BC : BL :: BM : BP :: 2BL : BP, donc $BP = \frac{2BL^2}{BC}$, c'est-à-dire, que $1 + cos\ A = 2 cos^2 \frac{1}{2} A$. Pareillement à cause des triangles semblables CLB & APM, on a CB : CL :: AM : AP; donc $AP = \frac{2AD^2}{CB}$, puisque

AM = 2 AD ou 2 DM ou 2 CL; donc $1 - cof\,A = 2\,fin^2 \frac{1}{2} A$. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. A cause des triangles semblables APM, BAT & BPM, on aura les deux proportions BP : PM : : BA : AT, ou $1 + cof\,A : fin\,A :: 2R : 2\,tang\,\frac{1}{2}A$; & encore PM : AP : : AB : AT; ou $fin\,A : 1 - cof\,A :: 2R : 2\,tang\,\frac{1}{2}A$; donc $1 + cof\,A = \frac{fin\,A \times R}{tang\,\frac{1}{2}A}$ & $1 - cof\,A = \frac{fin\,A \times tang\,\frac{1}{2}A}{R}$. *C. Q. F.* 2°, *D.*

Corollaire.

22. Donc $\frac{1 - cof\,A}{1 + cof\,A} = \frac{tang^2\,\frac{1}{2}A}{RR}$; & $\frac{1 + cof\,A}{1 - cof\,A} = \frac{cotang^2\,\frac{1}{2}A}{RR}$; de plus il suit encore delà que si l'on nomme V & v les sinus-verses AP, BP d'un arc AM, on aura $V = \frac{2\,fin^2\,\frac{1}{2}A}{R}$ & $v = \frac{2\,cof^2\,\frac{1}{2}A}{R}$ ou $\frac{VR}{2} = fin^2\,\frac{1}{2}A$ & $\frac{vR}{2} = cof^2\,\frac{1}{2}A$.

En nommant A l'arc MG complément de AM on aura par les triangles semblables AMP, MPB & AMB les formules suivantes. $R + fin\,A = 2\,fin^2\,(45° + \frac{1}{2}A)$, & $R - fin\,A = 2\,fin^2\,(45° - \frac{1}{2}A)$ & $\frac{R + fin\,A}{R - fin\,A} = \frac{fin^2\,(45° + \frac{1}{2}A)}{fin^2\,(45° - \frac{1}{2}A)}$.

Probleme.

23. *Etant donnés deux arcs quelconques* AM & AN; *trouver le sinus de leur somme & de leur différence* (fig. 5).

Solution.

Soit désigné le plus grand arc par A & le plus petit par B, soit prolongé le sinus MP du plus grand arc AM, jusqu'à ce qu'il rencontre le rayon CN qui passe par l'extrémité du plus petit arc dans un point R; enfin soit menée la droite ML perpendiculaire au même rayon, laquelle sera le sinus de la somme des arcs AM & AN.

Cela posé, les triangles semblables CQN, CPR donnent CQ : QN :: CP : PR ou $cos\,B : sin\,B :: cos\,A : PR = \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B}$; donc $RM = sin\,A + \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B}$; de plus les triangles semblables NQC, RLM donnent encore NC : QC :: MR : ML, ou bien $R : cos\,B :: sin\,A + \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B} : sin\,(A + B). = \frac{sin\,A \times cos\,B + sin\,B \times cos\,A}{R}$. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. Pour trouver le sinus de la différence de deux arcs, nous regarderons actuellement MN comme le plus grand que nous avons nommé A, & l'arc AN comme le plus petit que nous désignerons toujours par B. Cela posé, les triangles semblables CQN, CLO donnent CQ : QN :: CL : LO; ou $cos\,B : sin\,B :: cos\,A : LO = \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B}$; donc $OM = sin\,A - \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B}$; de plus à cause des triangles semblables MPO, CQN, on aura CN : CQ :: OM : PM; ou $R : cos\,B :: sin\,A - \frac{cos\,A \times sin\,B}{cos\,B} : sin\,(A - B) = \frac{sin\,A \times cos\,B - sin\,B \times cos\,A}{R}$. *C. Q. F.* 2°, *D.*

PROBLEME II.

24. *Trouver le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs quelconques* A *&* B (fig. 5).

SOLUTION.

Les triangles CQN & MPO étant semblables puisqu'ils ont leurs côtés perpendiculaires les uns sur les autres, on aura CQ : QN :: MP : PO; ou $cos\,B : sin\,B :: sin\,A : PO = \frac{sin\,A \times sin\,B}{cos\,B}$, donc $CO = cos\,A - \frac{sin\,A \times sin\,B}{cos\,B}$. Mais on a encore à cause des triangles semblables CQN, CLO; CN : CQ :: CO : CL, ou $R : cos\,B :: cos\,A - \frac{sin\,A \times sin\,B}{cos\,B} : cos\,(A + B) = \frac{cos\,A \times cos\,B - sin\,A \times sin\,B}{R}$. *C. Q. F.* 1° *T.*

2°. En regardant l'arc MN comme A, & l'arc AN comme B, il eſt viſible que CP ſera le coſinus de la différence des mêmes arcs. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CQN, MLR; CQ : QN : : ML : LR ou $\cos B : \sin B :: \sin A : LR = \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B}$; donc CR ou $CL + LR = \cos A + \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B}$; & à cauſe des triangles ſemblables CQN, CPR, on aura CN : CQ : : RC : CP; ou bien $R : \cos B :: \cos A + \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B} : \cos (A-B) = \frac{\cos A \times \cos B + \sin A \times \sin B}{R}$. C. Q. F. 2° T.

COROLLAIRE I.

25. Il ſuit des formules que nous venons de découvrir aux deux derniers problêmes que l'on aura les deux proportions ſuivantes :

$\sin(A+B) : \sin(A-B) :: \sin A \times \cos B + \sin B \times \cos A : \sin A \times \cos B - \sin B \times \cos A$, &

$\cos.(A+B) : \cos(A-B) :: \cos A \times \cos B - \sin A \times \sin B : \cos A \times \cos B + \sin A \times \sin B$.

Donc en diviſant les deux termes du ſecond rapport de la premiere proportion par $\cos A \times \cos B$, & ceux du ſecond rapport de la ſeconde proportion par $\cos A \times \sin B$, on aura les deux analogies ſuivantes, après avoir ſubſtitué aux nouvelles expreſſions celles des tangentes qui leur ſont égales (n°. 11).

$\sin(A+B) : \sin(A-B) :: \tang A + \tang B : \tang A - \tang B$, & de même

$\cos(A+B) : \cos(A-B) :: \cot B - \tang A : \cot B + \tang A :: \cot A - \tang B : \cot A + \tang B$.

Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que ces proportions pourroient s'écrire ſous la forme d'une équation.

COROLLAIRE II.

26. Puisque l'on a $cof(A+B) : cof(A-B) :: cof A \times cof B - fin A \times fin B : cof A \times cof B + fin A \times fin B$, il s'ensuit que l'on aura par un *detrahendo* $cof(A-B) - cof(A+B) = 2 fin A \times fin B$.

On trouveroit de même par un *componendo* que $cof(A+B) + cof(A-B) = 2 cof A \times cof B$.

De même des proportions $fin(A+B) : fin(A-B) :: fin A \times cof B + fin B\, cof A : fin A \times cof B - fin B \times cof A$, on trouvera encore par un *componendo* & un *detrahendo* que

$2 fin A \times cof B = fin(A+B) + fin(A-B)$ & que $2 fin B \times cof A = fin(A+B) - fin(A-B)$. réunissant toutes ces expressions & divisant par 2, on aura les suivantes.

$$Sin A \times fin B = \frac{cof(A-B) - cof(A+B)}{2}; fin A \times cof B = \frac{fin(A+B) + fin(A-B)}{2}.$$

$$Cof A \times cof B = \frac{cof(A+B) + cof A-B)}{2}; fin B \times cof A = \frac{fin(A+B) - fin(A-B)}{2}.$$

COROLLAIRE III.

27. Il suit encore delà que si l'on connoît les sinus & cosinus de tous les arcs au-dessous de 30°, on connoîtra aussi les sinus & cosinus de tous les arcs au-dessus de 30° jusqu'à 60° par la soustraction seule ; d'où il suit que si l'on calcule par ce moyen les sinus & cosinus jusqu'à 45°, on aura tous les sinus & cosinus jusqu'à 90°, puisque le cosinus d'un angle au-dessous de 45° est le sinus d'un arc qui surpasse d'autant 45°. Pour saisir la vérité de ce Corollaire, il faut faire attention que le sinus de 30° étant la moitié de la corde de 60° sera égal

à $\frac{R}{2}$, donc si l'on fait A = 30°; *sin* A × *sin* B = $\frac{R \times sin B}{2} = \frac{cos(A-B) - cos(A+B)}{2}$ d'où l'on tire sur le champ R × *sin* B = *cos* (30° — B) — *cos* (30° + B) ou *cos* (30° + B) = *cos* (30° — B) — *sin* B, ce qui fera connoître *cos* (30° + B), puisque l'on connoît B par l'hypotese moindre que 30°. De même puisque sin A × cos B = $\frac{sin(A+B) + sin(A-B)}{2}$, on trouvera *cos* B = *sin* (30° + B) + *sin* (30° — B), d'où l'on tire *sin* (30° + B) = *cos* B — *sin* (30° — B); ce Corollaire fait voir comment on a pu construire aisément les Tables des sinus & des cosinus.

COROLLAIRE IV.

28. Si l'on suppose l'arc B successivement égal à A, 2A, 3A, &c, on trouvera aisément par la formule du premier Problême les sinus des arcs multiples. Pour cela supposant toujours que le sinus de l'arc A est désigné par *s* & son cosinus par *c*, & représentant les sinus & cosinus des arcs multiples par *sin* A, *sin* 2 A, *sin* 3 A, *sin* 4 A, &c; *sin* n A on formera aisément les Tables suivantes.

$$Sin.\ A = \sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 2A = 2c\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 3A = (4cc - 1)\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 4A = (8c^3 - 4c)\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 5A = (16c^4 - 12c^2 + 1)\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 6A = (32c^5 - 32c^3 + 6c)\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 7A = (64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)\sqrt{rr - cc}.$$
$$Sin.\ 8A = (128c^7 - 192c^5 + 80c^3 - 10c)\sqrt{rr - cc}.$$

&c.

OU

$Sin.\ A = s.$

$Sin.\ 2A = 2s\sqrt{r^2 - ss}.$

$Sin.\ 3A = 3s - 4s^3.$

$Sin.\ 4A = (4s - 8s^3)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 5A = 5s - 20s^3 + 16s^5.$

$Sin.\ 6A = (6s - 32s^3 + 32s^5)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 7A = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7.$

$Sin.\ 8A = (8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 9A = 9s - 120s^3 + 432s^5 - 576s^5 + 256s^9.$

&c.

Pour trouver aiſément chacune de ces deux Tables, il n'y a qu'à ſuppoſer le dernier ſinus trouvé $=$ *ſin* A, tandis que le ſinus & coſinus de B ſont conſtamment déſignés par *s* & *c*, & chercher enſuite le ſinus de la ſomme de ces deux arcs par la formule :

Sin (A + B) = *ſin* A × *coſ* B + *ſin* B × *coſ* A. Il n'eſt pas difficile de voir que l'on rendroit tous les termes de ces équations homogenes, en ſubſtituant les différentes puiſſances du rayon ou ſinus total que nous nous ſommes diſpenſés d'exprimer. On voit pareillement que la premiere ſuite donne l'expreſſion des ſinus de l'arc multiple en coſinus de l'arc ſimple, & la ſeconde donne les expreſſions des mêmes ſinus en ſinus de l'arc ſimple. Pour donner à ces formules toute la généralité dont elles ſont ſuſceptibles, nous ajouterons ici la formule générale qui convient à chaque ſuite ; il eſt aiſé de voir que la ſeconde Table aura deux formules générales à cauſe de $\sqrt{rr - ss}$ qui ſe trouve à tous les termes de rang pair, ſans ſe trouver aux termes de rang impair. Quant à la maniere de trouver ces formules générales, elle ſe déduit de la conſidération des coefficients & des expoſants de chaque terme.

A *Formule générale pour la premiere suite.*

$$\text{Sin.}\, nA = \Big(2^{n-1} c^{n-1} - \overline{n-2} \times 2^{n-3} c^{n-3} + \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1.\,2} 2^{n-5} c^{n-5} - \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5} \times \overline{n-6}}{1.\,2.\,3.} \times 2^{n-7} c^{n-7} + \frac{\overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7} \times \overline{n-8}}{1.\,2.\,3.\,4.} 2^{n-9} c^{n-9} - \&c.\Big) \sqrt{rr-cc};$$

n étant un nombre quelconque.

B *Premiere formule générale pour la seconde suite* n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Sin.}\, nA = ns - \frac{n \times \overline{nn-1}}{1.\,2.\,3.} s^3 + n \frac{\overline{nn-1} \times \overline{nn-9}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.} s^5 - n \times \frac{\overline{nn-1} \times \overline{nn-9} \times \overline{nn-25}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.} s^7, \&c.$$

C *Seconde formule générale pour la seconde suite* n *étant un nombre pair quelconque.*

$$\text{Sin.}\, nA = \Big(ns - \frac{n \times \overline{nn-4}}{1.\,2.\,3.} s^3 + \frac{n \times \overline{nn-4} \times \overline{nn-16}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.} s^5 - \frac{n \times \overline{nn-4} \times \overline{nn-16} \times \overline{nn-36}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.} s^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{n-1} s^{n-1}\Big) \sqrt{rr-ss}.$$

COROLLAIRE V.

29. Pareillement si l'on suppose encore l'arc B successivement égal à A, 2A, 3A, 4A, &c, en se servant encore des mêmes dénominations ; & suivant le même procédé sur la formule du cosinus de la somme de deux arcs trouvée au second problême, on formera encore les deux Tables suivantes, dont l'une exprime les cosinus d'arcs multiples en cosinus, & l'autre en sinus de l'arc simple ; on aura donc :

Cos. $A = c$.
Cos. $2A = 2cc - 1$.
Cos. $3A = 4c^3 - 3c$.
Cos. $4A = 8c^4 - 8c^2 + 1$.
Cos. $5A = 16c^5 - 20c^3 + 5c$.
Cos. $6A = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$.
Cos. $7A = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c$.
&c.

OU

Cos. $A = \sqrt{rr - ss}$.
Cos. $2A = -2ss + rr$.
Cos. $3A = (-4ss + rr)\sqrt{rr - ss}$.
Cos. $4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$.
Cos. $5A = (16s^4 - 12s^2 + 1)\sqrt{rr - ss}$.
Cos. $6A = -32s^6 + 48s^4 - 18s^2 + 1$.
Cos. $7A = (-64s^6 + 80s^4 - 24s^2 + 1)\sqrt{rr - ss}$.
&c.

D. *Formule générale pour la premiere suite,* n *étant un nombre quelconque.*

$$r^{n-1} \text{ Cof. } nA = 2^{n-1} c^{n} - \frac{n}{1} r^{2}\, 2^{n-3} c^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-3}}{1.\ 2.} r^{4}\, 2^{n-5} c^{n-4} - \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.\ 2.\ 3.} r^{6}\, 2^{n-7} c^{n-6} + \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} 2^{n-9} r^{8} c^{n-8} - \text{\&c.}$$

Si l'arc désigné par A est obtus, son cosinus devient négatif, & alors toutes les formules où la lettre *c* se trouve élévée à des puissances impaires changent de signe ; ce qui aura lieu pareillement dans la formule générale lorsque *n* est impair.

Formule

F. *Formule générale de la seconde suite,* n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Cof. } nA = \left(\pm 2^{n-1} s^{n-1} \mp \overline{n-2} \times 2^{n-3} s^{n-3} \pm \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1.\,2.} 2^{n-5} s^{n-5} \mp \text{\&c.}\right) \sqrt{rr-ss.}$$

G. *Formule générale de la seconde suite,* n *étant un nombre pair quelconque.*

$$\mp r^{n-1} \text{Cof.} nA = 2^{n-1} s^n - \frac{n}{1} r^2 2^{n-3} s^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-3}}{1.\,2.} r^4 2^{n-5} s^{n-4} - \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.\,2.\,3.} r^6 2^{n-7} s^{n-6} + \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1.\,2.\,3.\,4.} 2^{n-9} r^8 s^{n-8} - \text{\&c.}$$

Les signes supérieurs ont lieu dans la premiere formule, lorsque le nombre impair est l'un des nombres impairs 1, 5, 9, 13, &c; & les chiffres inférieurs dans les cas où n est l'un des nombres impairs 3. 7. 11. &c.

De même dans la seconde formule les signes supérieurs ont lieu, lorsque le nombre est pairement pair; & le signe inférieur est pour les nombres qui ne sont pas pairement pairs.

SCHOLIE.

30. On pourroit déduire des formules générales que nous venons de donner un grand nombre de vérités intéressantes, sur la nature des racines des équations; dans la crainte de nous étendre trop loin nous renvoyons nos Lecteurs aux ouvrages de M. Euler, où l'on trouvera tout le détail qu'on pourroit desirer sur cette matiere. Nous nous contenterons d'appliquer ces formules à la théorie des puissances des sinus & cosinus, que nous réduirons à deux Problêmes. Le premier; *étant donnée une puissance quelconque d'un sinus ou d'un cosinus, trouver l'expression de cette puissance en sinus &*

cosinus de l'arc simple ou de ses multiples. Le second que nous venons de résoudre, n'a besoin que d'être énoncé, & se réduit à *exprimer un sinus ou cosinus d'un arc multiple par des puissances du sinus ou cosinus de l'arc simple.* M. Euler déduit les formules qu'il a donné sur cette théorie des formules que nous avons exposées au n°. 26; il nous a paru qu'elles se tiroient plus aisément des formules précédentes.

PROBLEME III.

31. *Exprimer les puissances des sinus & cosinus d'un arc quelconque par les sinus & cosinus de ce même arc ou de ses multiples.*

SOLUTION.

Ce Problême renferme deux parties : nous allons d'abord chercher les formules qui donnent les valeurs des puissances des sinus. Pour cela je ferai usage des deux tables données aux deux derniers Corollaires, & dans lesquelles on a employé la lettre s qui désigne le sinus de l'arc simple. Pour peu qu'on y fasse attention, l'on verra que les termes de rangs impairs de la seconde table du n°. 28, donneront les valeurs des puissances impaires de la lettre s, & les termes de rang pair de la seconde table du Corollaire V donneront les puissances paires du même sinus; observant d'éliminer dans les termes ultérieurs les puissances qui pourroient s'y rencontrer. Ainsi de $\sin A = s$, on tire $\sin A = \sin A$.

De même de l'équation $\cos 2A = -2ss + rr$; on tire $2\sin^2 A = rr - \cos 2A$: revenant à la seconde table du Corollaire IV; de l'équation $\sin 3A = 3s - 4s^3$, l'on déduit $4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$; enfin de la seconde table du Corollaire V, on tire $\cos 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$; d'où l'on déduira aisément $8\sin^4 A = \cos 4A - 4\cos 2A + 3$, en substituant à s^2 la valeur déja trouvée $2\sin^2 A = rr - \cos 2A$. Et ainsi des autres en suivant ce procédé, on formera aisément la table suivante.

$\text{Sin}\ A = \sin A.$

$2\ \text{Sin}^2 A = r - \cos 2A.$

$4\ \text{Sin}^3 A = 3 \sin A - \sin 3A.$

$8\ \text{Sin}^4 A = 3 - 4 \cos 2A + \cos 4A.$

$16\ \text{Sin}^5 A = 10 \sin A - 15 \sin 3A + \sin 5A.$

$32\ \text{Sin}^6 A = 10 - 15 \cos 2A + 6 \cos 4A - \cos 6A.$

$64\ \text{Sin}^7 A = 35 \sin A - 21 \sin 3A + 7 \sin 5A - \sin 7A.$

$128\ \text{Sin}^8 A = 35 - 56 \cos 2A + 28 \cos 4A - 8 \cos 6A + \cos 8A.$

$256\ \text{Sin}^9 A = 126 \sin A - 84 \sin 3A + 36 \sin 5A - 9 \sin 7A + \sin 9A,$

&c.

Il eſt aiſé de remarquer la loi des coefficients de cette table; & d'abord on voit que les puiſſances impaires du ſinus de A ſont toutes exprimées par les ſinus d'arcs multiples du même arc, tandis que les puiſſances paires des ſinus de A ſont toutes exprimées en coſinus. La loi des coefficients eſt viſiblement celle des coefficients du binome élevé à une puiſſance quelconque; en obſervant que dans les puiſſances paires le nombre abſtrait qui n'eſt point multiplié par un coſinus de A, n'eſt que la moitié du coefficient que donne celui du même rang dans la puiſſance ſemblable du binome. Cela poſé, on voit qu'il faut néceſſairement deux formules générales pour exprimer ces ſuites de puiſſances.

H. *Premiere formule générale des puiſſances de ſin* A *pour* n *impair, en commençant par les derniers termes de la table.*

$$2^{n-1} \sin^n A = \pm \sin.\ nA \mp n \sin.\ \overline{n-2}.\ A \pm \frac{n \times n-1}{2.} \sin.\ \overline{n-4}.\ A \mp \frac{n \times n-1 \times n-2}{1.\ 2.} \sin.\ \overline{n-6}.\ A \pm \text{\&c.} \ldots\ldots \pm \frac{n \times n-1 \ldots n-2.\ \text{\&c.}}{1.\ 2.\ 3.\ \text{\&c.}} \sin.\ A.$$

K. *Seconde formule générale pour les puissances de* sin. A, n *étant un nombre pair quelconque.*

$$2^{n-1} \sin^n A = \pm \cos. n A \mp n \cos. \overline{n-2}. A \pm \frac{n \times n-1}{1.2.} \times \cos. \overline{n-4}. A \mp \frac{n \times n-1 \times n-2}{1.2.3.} \cos. \overline{n-6}. A \ldots\ldots\ldots \mp \frac{1}{2}\left(\frac{n \times n-1 \times n-2 \,\&c.}{1.2.3.\,\&c.}\right) \times \cos. 0. A.$$

Chacune des deux formules précédentes a deux signes: n étant un nombre impair, on se servira du signe supérieur lorsque $n = 4m + 1$; m étant un nombre quelconque: il faudra prendre les signes inférieurs lorsque $n = 4m - 1$; m étant un nombre quelconque. Pareillement si n est pair, on se servira des signes supérieurs lorsque $n = 4m$, m étant un nombre quelconque; & l'on prendra le signe inférieur pour $n = 2m$, m désignant un nombre impair quelconque.

32. Pour trouver présentement une formule semblable pour les puissances successives du cosinus d'un angle, on se servira des deux premieres tables du cinquieme & quatrieme Corollaire, précisément de la même maniere que nous nous sommes servi des deux dernieres; & l'on trouvera aisément la table suivante.

$\cos^1 A = \cos A.$

$2 \cos^2 A = 1 + \cos 2 A.$

$4 \cos^3 A = 3 \cos A + \cos 3 A.$

$8 \cos^4 A = 3 + 4 \cos 2 A + \cos 4 A.$

$16 \cos^5 A = 10 \cos A + 5 \cos 3 A + \cos 5 A.$

$32 \cos^6 A = 10 + 15 \cos 2 A + 6 \cos 4 A + \cos 6 A.$

$64 \cos^7 A = 35 \cos A + 21 \cos 3 A + 7 \cos 5 A + \cos 7 A.$

&c.

Regardant le dernier terme de chacune de ces équations comme le premier, ou ce qui revient au même,

prenant toutes ces équations à rebours, on formera aisément la formule générale suivante.

$$\text{L. } 2^{n-1} \cos^{n} A = \cos nA + \frac{n}{1} \cos \overline{n-2}.A + \frac{n \times n-1}{1.\ 2.} \cos \overline{n-4} \times A + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \cos \overline{n-6}.A$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{n \times n-1 \times n-2 \text{ \&c.}}{1.\ 2.\ 3 \text{ \&c.}} \cos \overline{n-n}.\ A \text{ ou}$$

$\cos$ A selon que n est un nombre pair ou impair. *C.Q.F.T.*

Scholie.

33. Quoique nous ayons déja résolu l'inverse du dernier Problême, néanmoins comme on peut encore en donner d'autres solutions au moyen des tables des nos. 28 & 29, en cherchant la loi des termes à commencer par les derniers termes, nous ajouterons encore ici ces solutions.

Probleme IV.

35. *Trouver une formule générale pour transformer un sinus ou cosinus du multiple d'un arc quelconque* A, *en puissances des sinus & cosinus de l'arc simple.*

Solution.

Ce Problême a plusieurs parties; le sinus d'un arc multiple étant donné peut être exprimé en sinus ou cosinus, selon qu'on se sert de la premiere ou de la seconde table du n°. 28. De plus il est visible que dans l'un & dans l'autre cas la formule doit avoir différentes expressions suivant que l'on commence la suite par le premier ou le dernier terme; de plus encore on voit qu'en commençant par le dernier terme, les formules générales sont encore différentes, suivant que le nombre n est pair ou impair. Cela posé; la formule A du n°. 28 est celle qui résout le problême en prenant l'expression des sinus multiples en puissance du cosinus de l'arc simple, & com-

mençant la ſuite par le premier terme, n étant un nombre quelconque pair ou impair. Les formules B & C du même num. donnent les valeurs générales des ſinus multiples en puiſſances du ſinus de l'arc ſimple ; B pour n impair, & C pour n pair quelconque ; en commençant chaque ſuite par le premier terme. Il nous reſte à chercher les formules générales qui ſatisfont au même Problême en commençant chaque ſuite par les plus hautes puiſſances du ſinus de l'arc ſimple ; & nous aurons viſiblement deux formules générales, ſuivant que n ſera un nombre pair ou impair.

M. *Formule pour réduire un ſinus multiple en fonctions du ſinus de l'arc ſimple*, n *étant un nombre pair.*

$$\text{Sin. } nA = \left(\mp 2^{n-1} s^{n-1} \pm \frac{\overline{n-2}}{1} \times 2^{n-3} s^{n-3} \mp \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1.\ 2} \times 2^{n-5} s^{n-5} \pm \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5} \times \overline{n-6}}{1.\ 2.\ 3}\, 2^{n-7} s^{n-7} \ldots\ldots \mp \&c\ldots + ns\right) \sqrt{rr - ss}.$$

N. *Formule pour réduire un ſinus multiple en fonctions du ſinus de l'arc ſimple*, n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Sin. } nA = \mp 2^{n-1} s^{n} \pm \frac{n}{1}\, 2^{n-3} s^{n-2} \mp \frac{n \times \overline{n-3}}{1.2}\, 2^{n-5} s^{n-4} \pm \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.\ 2.\ 3}\, 2^{n-7} s^{n-6} \mp \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\, 2^{n-9} s^{n-8} \pm \frac{n \times \overline{n-6} \times \overline{n-7} \times \overline{n-8} \times \overline{n-9}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\, 2^{n-11} s^{n-10}$$

&c.

O. *Formule pour réduire un cosinus multiple en fonctions du cosinus de l'arc simple, n étant un nombre pair quelconque.*

$$\pm \text{Cos.}\, nA = r^n - \frac{n^2}{1.2} \times r^{n-2} \cos^2 A + \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} r^{n-4} \cos^4 A - \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} \times \frac{n^2-16}{5.6} r^{n-6} \cos^6 A + \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} \times \frac{n^2-16}{5.6} \times \frac{n^2-36}{6.7} r^{n-8} \cos^8 A - \&c.$$

P. *Formule pour n supposé un nombre impair quelconque.*

$$\pm \text{Cos.}\, nA = nr^{n-1} \cos. A - n \frac{n^2-1}{2.3} r^{n-3} \cos^3 A + \frac{n \times n^2-1}{2.3} \times \frac{n^2-9}{4.5} r^{n-5} \cos^5 A - \frac{n \times n^2-1 \times n^2-9 \times n^2-25}{1.2.3 \quad 4.5 \quad 6.7} r^{n-7} \cos^7 A + \frac{n \times n^2-1 \times n^2-9 \times n^2-25 \times n^2-49}{1.2.3 \quad 4.5 \quad 6.7 \quad 8.9} r^{n-9} \cos^9 A - \&c.$$

Ces deux dernieres formules se déduisent aisément de la premiere table du Corollaire V (n°. 29), en observant la loi des coefficients pour les termes de rang pair & de rang impair. Dans la premiere formule M des sinus, on prendra le signe supérieur lorsque le nombre est quelqu'un des nombres pairs désignés par $4m$, m étant un nombre quelconque; le signe inférieur a lieu pour tous les nombres de la forme $2m$ en supposant que m est un nombre impair quelconque.

Pareillement dans la seconde formule N, le signe supérieur doit avoir lieu pour les les nombres impairs de la forme $4m - 1$, & le signe inférieur pour ceux de la forme $4m + 1$, m étant un nombre quelconque. On verra de même que dans la troisieme suite O, le cosinus est positif ou négatif suivant que l'on a $n = 4m$ ou $n = 2m$, m étant un nombre quelconque dans le premier cas & un

nombre impair dans le second. Enfin lorsque n est impair, le cosinus est positif ou négatif selon que $n = 4m + 1$ on $4m - 1$.

De l'usage des Facteurs imaginaires dans la théorie des Sinus & Cosinus.

36. Toutes les suites que nous venons de donner, ont été déduites immédiatement des deux Problêmes sur les sinus & cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs quelconques, que nous avons supposés égaux; mais il y auroit encore bien d'autres méthodes de découvrir de nouvelles suites; nous ajouterons seulement ici celle où l'on employe des facteurs imaginaires, non que les expressions absurdes en elles-mêmes soient préférables à d'autres, mais parce qu'on peut quelquefois les employer heureusement pour abréger les calculs, & découvrir facilement, par leur moyen, des vérités intéressantes.

PROBLEME V.

37. *Trouver les Facteurs de la somme de deux quarrés tels que* aa & bb, *ou ce qui revient au même, découvrir comment il faut combiner* a & b *par multiplication, pour que le produit soit* aa + bb.

SOLUTION.

Soient A & B les indéterminées qui doivent affecter les racines a & b des quarrés, pour que le produit soit $aa + bb$; & supposons que les facteurs soient $a + Ab$, & $aB + b$. Faisant la multiplication de ces deux facteurs, on trouve que le produit $aaB + abAB + ab + Abb = aa + bb$; comparant les termes de cette équation, je vois qu'en supposant $aaB = aa$ on aura $B = 1$, & qu'en supposant $Abb = bb$ on aura aussi $A = 1$; ce qui m'apprend d'abord que si les quantités A & B sont possibles, on aura $A = B$, ce qui donne $AB = AA = BB$;

présentement à cause que dans la somme $aa + bb$ le terme ab manque, il faut donc que l'on ait $ab + abAB = 0$ ou $ab + AAab = 0$ ou $ab + BBab = 0$; c'est-à-dire, qu'on auroit $AA + 1 = 0$ ou $BB + 1 = 0$; ce qui est impossible; puisque nous avons vu que AA ou $BB = 1$; donc les facteurs ne peuvent pas avoir la forme supposée; donc la quantité proposée ne peut pas être décomposée en facteurs, ou, ce qui revient au même, n'est pas un produit des quantités a & b, de quelque maniere qu'on veuille les combiner. Cependant si on veut en quelque façon résoudre l'équation $AA + 1 = 0$, malgré l'absurdité qu'elle emporte, comme on vient de le voir; on aura $AA = -1$; & tirant les racines $A = \pm\sqrt{-1}$. On trouvera de même $B = \pm\sqrt{-1}$. Cette expression que les Géometres ont nommée imaginaire, n'est donc pas une quantité réelle, mais un signe d'une supposition absurde dans laquelle on regarde comme produit de deux quantités ce qui n'en est pas un.

Ce signe pouvant être d'usage, rien n'empêche de l'employer dans le calcul, & alors les facteurs imaginaires de $aa + bb$ seront $a + b\sqrt{-1}$) & $a - b\sqrt{-1}$ ou $b + a\sqrt{-1}$ & $b - a\sqrt{-1}$, ou $-a + b\sqrt{-1}$ $-a, -b\sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

38. Ayant découvert que $aa + bb$ ne peut pas être un produit des quantités a & b, on pourroit demander s'il n'y a pas quelque moyen de trouver cette même somme de quarrés par une autre combinaison des quantités $a + b$ & $a - b$. Dans cette vue, j'éleve chacune de ces quantités au quarré, & je trouve $aa + 2ab + bb$, $aa - 2ab + bb$. Je vois aussi qu'en ajoutant ces quarrés, & prenant leur demi-somme, on aura la somme $aa + bb$; donc il est clair que cette somme de quarrés n'est pas un produit des quantités $a + b$ & $a - b$, mais uniquement la demi-somme des quarrés de ces mêmes quantités.

On pourroit pouſſer cette théorie beaucoup plus loin; mais j'ai cru que le peu que j'en ai dit ici, étoit néceſſaire pour fixer l'idée qu'on doit ſe former des imaginaires qui n'ont été bien préſentées dans aucun élément, du moins de ceux que je connois. De plus cette théorie me paroît également néceſſaire, depuis qu'on a introduit ces expreſſions dans les ſinus & coſinus. Enfin on ne peut pas avoir des notions préciſes des rapports ſinguliers qui ſe trouvent entre les courbes du genre hyperbolique & celles du genre elliptique, & pareillement entre les logarithmes & les arcs de cercle, ſans y faire l'application de tout ce que nous venons de dire ici.

COROLLAIRE I.

39. Il ſuit delà que ſi l'on veut trouver les facteurs imaginaires de $\sin^2 A + \cos^2 A = RR$, on aura $(\cos A + \sin A \sqrt{-1}) \times (\cos A - \sin A \sqrt{-1}) = RR$. De même ſi l'on ſuppoſe un autre arc B; & qu'on veuille faire uſage des facteurs imaginaires, on trouvera que

$$(\cos A + \sin A \sqrt{-1}) \times (\cos B + \sin B \sqrt{-1}) = \cos A \times \cos B - \sin A \times \sin B + \sqrt{-1} \times (\cos A \times \sin B + \sin A \times \sin B). = \cos(A+B) + \sqrt{-1} \sin(A+B).$$ (art. 23 & 24).

De même $(\cos A - \sin A \sqrt{-1}) \times (\cos B - \sin B \sqrt{-1}) = \cos(A+B) - \sqrt{-1} \sin(A+B)$. On trouveroit par un calcul ſemblable que $(\cos A \pm \sqrt{-1} \sin A) \times (\cos B \pm \sqrt{-1} \sin B) \times \cos C \pm \sqrt{-1} \sin C) = \cos(A+B+C) \pm \sqrt{-1} \sin(A+B+C)$.

COROLLAIRE II.

40. Donc ſi l'on prend deux facteurs, & qu'on ſuppoſe les arcs A & B égaux entr'eux, on aura $(\cos A \pm \sin$

$A\sqrt{-1})^2 = cos\,2A \pm sin\,2A\sqrt{-1}$. On trouvera de même que $(cos\,A \pm sin\,A\sqrt{-1})^3 = cos\,3A \pm sin\,3A\sqrt{-1}$; & par analogie l'on en conclura généralement que $(cos\,A \pm sin\,A\sqrt{-1})^n = cos\,nA \pm sin\,nA\sqrt{-1}$.

COROLLAIRE III.

41. De la derniere équation l'on tire $sin\,nA\sqrt{-1} = (cos\,A + sin\,A\sqrt{-1})^n - cos\,nA$. Et à cause du signe $-$ on aura encore $sin\,nA\sqrt{-1} = cos\,nA - (cos\,A - sin\,A\sqrt{-1})^n$. Ajoutant ces deux valeurs & divisant par $2\sqrt{-1}$, on trouvera l'expression suivante pour le sinus d'un arc multiple.

$$Sin.\,nA = \frac{(cos\,A + sin\,A\sqrt{-1})^n - (cos\,A - sin\,A\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

On trouveroit de même que

$$Cos.\,nA = \frac{(cos\,A + sin\,A\sqrt{-1})^n + (cos\,A - sin\,A\sqrt{-1})^n}{2}$$

COROLLAIRE IV.

42. Si l'on éleve chacun de ces binomes à la puissance n par la formule générale, on trouvera que tous les termes affectés d'imaginaires se détruisent, & l'on aura deux suites générales, dont l'une exprimera les sinus & l'autre les cosinus d'arcs multiples.

Q. *Premiere formule.*

$$Sin.\,nA = n.\,cos^{n-1}A \times sin\,A - \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\,2.\,3}\,cos^{n-3}A\,sin^3A + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,cos^{n-5}A\,sin^5A,$$

&c.

R. *Seconde formule.*

$$\text{Cof.}\, n\text{A} = cof.^n \text{A} - \frac{n \times n-1}{1.2} cof.^{n-2} \text{A}\, fin^2 \text{A} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} cof.^{n-4} \text{A}\, fin^4 \text{A} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} cof.^{n-6} \text{A}\, fin^6 \text{A} + \&c.$$

Corollaire V.

43. Si l'on fuppofe que l'arc A foit infiniment-petit, on aura fin A = A & cof A = r ou 1. Pour que l'arc nA devienne d'une grandeur finie, il faudra que n devienne infiniment-grand; ce qui réduira les produits de $n \times \overline{n-1}$; $n \times \overline{n-2}$; &c. aux puiffances n^2, n^3 &c. Si l'on fait l'arc nA = c à caufe que fin A = A, dans notre fuppofition A = $\frac{c}{n}$; on aura fin^2 A = $\frac{c^2}{n^2}$ &c. ainfi des autres puiffances de fin A, tandis que toutes les puiffances de cof A feront égales à l'unité; ainfi l'on aura de nouvelles formules au moyen defquelles il fera facile d'exprimer le finus ou cofinus en parties de l'arc, ou en décimales du rayon.

S. *Premiere formule.*

$$\text{Sin. C} = c - \frac{c^3}{1.2.3} + \frac{c^5}{1.2.3.4.5} - \frac{c^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{c^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$

T. *Seconde formule.*

$$\text{Cof. C} = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4} - \frac{c^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{c^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

On voit que ces formules donneront le finus & cofinus

d'autant plus rapidement qu'elles ſeront plus convergentes, ce qui arrivera ſi l'arc déſigné par c eſt d'un petit nombre de degrés. Il y a encore pluſieurs ſuites ſemblables. On ſe ſert de ces ſuites pour calculer les ſinus & coſinus naturels d'un arc quelconque. (Voyez l'expoſition du calcul aſtronomique de M. de la Lande, page 21).

PROBLEME VI.

44. *Trouver la tangente de la ſomme ou de la différence de deux arcs donnés* A & B.

SOLUTION.

Soient AM & AN (*fig.* 6.) les arcs donnés dont AG & AL ſont les tangentes, que nous déſignerons par t & θ: il eſt viſible que la ligne NT perpendiculaire à l'extrémité du rayon CN ſera la tangente de la ſomme de ces deux arcs; nous la déſignerons par T; & ces ſuppoſitions nous ferons trouver la tangente de la ſomme de deux arcs quelconques A & B. Pour avoir celle de la différence, nous regarderons l'arc MN comme A, & l'arc AM comme B; AL ſera la tangente de la différence des arcs A & B; nous la nommerons τ. Soient encore abaiſſées les perpendiculaires AQ, GP au rayon CN. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CRN, CAQ, l'on aura CR : RN : : CA : AQ ou $\sqrt{rr+\theta\theta} : \theta : : r : \frac{r\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; de même à cauſe des triangles ſemblables AQL, GPL, on aura AL : AQ : : GL : GP ou $\theta : \frac{r\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}} : : t+\theta : \frac{\overline{t+\theta}\times r}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$. De plus à cauſe que CL : AL : : AL : QL, on aura QL $= \frac{\theta\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; il eſt encore évident, à cauſe des triangles ſemblables AQL, GPL que AL : QL : : GL : PL ou que $\theta : \frac{\theta\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}} : :$

$t+\theta : \frac{\overline{t+\theta}\times\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; donc CP ou CL — PL $= \frac{rr-\theta t}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$.
Au moyen des expressions que nous venons de trouver, il est aisé d'avoir celle de la tangente NT ; car à cause des triangles semblables CPG, CNT on aura CP : PG : : CN : NT & analytiquement $\frac{rr-\theta t}{\sqrt{rr+\theta\theta}} : \frac{r\times\overline{\theta+t}}{\sqrt{rr+\theta\theta}} : : r : \frac{r\times\overline{\theta+t}}{rr-\theta t} =$ *tang* (A + B) d'où l'on tire en faisant le rayon égal à l'unité *tang* (A + B) $= \frac{tang\,A + tang\,B}{1 - tang\,A \times tang\,B}$. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Pour avoir la tangente de la différence de deux angles, on se servira de l'équation que nous venons de trouver $T = \frac{rr\times\overline{\theta+t}}{rr-\theta t}$; & traitant l'une des tangentes θ ou t comme inconnue, on aura la tangente de la différence de deux arcs. Les regles ordinaires nous donnent t ou $\tau = \frac{rr\times(T-\theta)}{rr+\theta T}$; donc en faisant le rayon égal à l'unité on aura τ ou *tang* (A — B) $= \frac{tang\,A - tang\,B}{1 + tang\,A \times tang\,B}$. *C. Q. F.* 2°, *T.*

SCHOLIE.

45. On auroit pu trouver ce même résultat sans aucune construction géométrique par le moyen des formules déja données, comme il suit. Soit S la sécante de A, & s celle de B. On aura par les propriétés connues des sinus, cosinus, tangentes & sécantes, *sin* A $= \frac{Tr}{S}$ & *cos* A $= \frac{rr}{S}$, & de même *sin* B $= \frac{tr}{s}$ & *cos* B $= \frac{rr}{s}$; substituant ces valeurs dans celles de *sin* (A ± B) on aura *sin* (A + B) $= \frac{rr\times\overline{T+t}}{Ss}$ & *sin* (A — B) $= \frac{r\times(rr-Tt)}{Ss}$; on trouveroit de même *cos* (A + B) $= \frac{rr\times\overline{T-t}}{Ss}$ & *cos* (A — B) $= \frac{r\times(rr+Tt)}{Ss}$; donc à cause que *tang* $= \frac{sin}{cos}$

on trouvera comme ci-deſſus $tang\,(A + B) = \frac{r \times \overline{T+t}}{rr - Tt}$ & $tang\,(A - B) = \frac{r \times (T - t)}{rr + Tt}$.

Corollaire I.

46. $Tang\,(A + B) \times tang\,(A - B) = \frac{(tang^2 A - tang^2 B) \times r^2}{rr - tang^2 A \times tang^2 B}$ $= \frac{(tang\,A + tang\,B) \times (tang\,A - tang\,B)\,r^2}{(r^2 + tang\,A \times tang\,B) \times (r^2 - tang\,A \times tang\,B)}$.

Corollaire II.

47. Si l'un des angles eſt de 45° on aura $tang\,A + 45° = \frac{\overline{1 + tang\,A} \times r}{1 - tang\,A} = \frac{rr}{tang\,(45° - A)}$. Car on trouvera ſur le champ que le rayon eſt moyen proportionnel entre $tang\,(45° + A)$ & $tang\,(45° - A)$. D'où il ſuit que ſi l'on a calculé les tangentes des angles au-deſſous de 45°, on aura toutes les tangentes des angles au-deſſus de 45° par une ſimple diviſion. Et ſi l'on a calculé les logarithmes des mêmes tangentes, on aura pareillement les logarithmes des tangentes des arcs au-deſſus de 45°, en ôtant le logarithme de la tangente trouvée du double logarithme du ſinus total. Ce Corollaire fait voir comment on a pu conſtruire aiſément les tables des tangentes & de leurs logarithmes.

Corollaire III.

48. Tant que les angles A & B ſeront tels que leur ſomme ſoit moindre que 90°, l'expreſſion de $tang\,(A + B)$ ſera poſitive. Si l'on ſuppoſe que $tang\,A \times tang\,B = rr$, ce qui arrive, lorſque les angles ſont compléments l'un de l'autre, le dénominateur devenant zéro nous avertit que cette tangente n'a plus d'expreſſion finie. Enfin lorſque $tang\,A \times tang\,B$ eſt plus grand que rr, ce qui a lieu, lorſque les deux angles font enſemble un angle obtus, l'expreſſion de la tangente devient né-

gative; ce qui avertit que cette tangente doit se prendre dans un sens opposé.

COROLLAIRE IV.

49. Si l'on suppose que les arcs A & B soient égaux, & qu'on imagine une suite d'arcs A, 2A, 3A, 4A, &c, multiples du premier, il sera facile d'en trouver les tangentes au moyen de la formule $tang\ (A+B) = \frac{tang\ A + tang\ B}{rr - tang\ A.\ tang\ B}$, en regardant toujours la derniere tangente trouvée comme *tang* A, & faisant toujours B = l'arc simple A, dont on cherche les multiples; suivant ce procédé on formera aisément la table suivante.

$$Tang\ A = T.$$

$$Tang\ 2A = \frac{2rT}{rr - TT}.$$

$$Tang\ 3A = \frac{3rrT - T^3}{r^2 - 3TT}.$$

$$Tang\ 4A = \frac{4r^4T - 4r^2T^3}{r^4 - 6r^2T^2 + T^4}.$$

$$Tang\ 5A = \frac{5r^4T - 10r^2T^3 + T^5}{r^4 - 10r^2T^2 + 5T^4}.$$

D'où il est aisé de déduire la formule générale suivante, en observant la loi des coefficients pour un arc multiple quelconque, & faisant le rayon égal à l'unité.

$$\text{Tang. } nA = \frac{nT - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}T^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}T^5 - \&c.}{1 - \frac{n.\,n-1}{1.\,2}T^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}T^4 - \&c.}$$

Pour abréger l'expression de cette formule, ainsi que toutes celles que nous avons données jusqu'ici, on peut faire attention que chaque coefficient renferme toujours celui du terme qui le précéde; ainsi représentant ces coefficients par les lettres indéterminées *A*, *B*, *C*, *D*, &c. pour

pour le numérateur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c; pour le dénominateur la formule précédente pourra s'exprimer comme on le voit ici.

$$\text{Tang.}\,nA = \frac{nT - A.\frac{n-1.n-2}{2.3}T^3 + B.\frac{n-3.n-4}{4.5}T^5 - C\times\frac{n-5.n-6}{6.7}T^7 + D\times\frac{n-7.n-8}{8.9}T^9 - \&}{1T^0 - \frac{n.n-1}{1.2}T^2 + \alpha\times\frac{n-2.n-3}{3.4}T^4 - \beta.\frac{n-4.n-5}{5.6}T^6 + \gamma.\frac{n-6.n-7}{8.9}T^8 - \&c.}$$

50. Si l'on veut exprimer les tangentes des arcs multiples en commençant par le plus haut terme ou la plus haute puissance de T, on verra aisément qu'il faut deux suites ou formules générales, l'une pour les nombres impairs & l'autre pour les nombres pairs. De plus à cause que les plus hautes puissances impaires sont alternativement positives & négatives, on aura les deux signes $\pm$ devant la tangente multiple.

Premiere formule pour n *impair.*

$$\pm\text{Tang.}\,nA = \frac{T^n - \frac{n.n-1}{1.2}T^{n-2} + A.\frac{n-2.n-3}{3.4}T^{n-4} - B.\frac{n-4.n-5}{5.6}T^{n-6}\ \&c.}{nT^{n-1} - \alpha\frac{n-1.n-2}{1.2.3}T^{n-3} + \beta\frac{n-3.n-4}{4.5}T^{n-5} - \gamma\frac{n-5.n-6}{6.7}T^{n-7}\ \&c.}$$

Seconde formule pour n, *supposé un nombre pair quelconque.*

$$\mp\text{Tang.}\,nA = \frac{nT^{n-1} - A.\frac{n-1.n-2}{2.3}T^{n-3} + B.\frac{n-3.n-4}{4.5}T^{n-5} - C\frac{n-5.n-6}{6.7}T^{n-7}\ \&c.}{T^n - \frac{n.n-1}{1.2}T^{n-2} + \alpha\frac{n-2.n-3}{3.4}T^{n-4} - \beta\frac{n-4.n-5}{5.6}T^{n-6}.}$$

51. Si l'on veut faire entrer les cotangentes dans l'expression des tangentes d'arcs multiples, la table précédente se changera facilement en celle qui suit, en mettant cotangente à la place de $\frac{RR}{T}$. D'où il sera également facile de former une autre table pour les cotangentes des arcs multiples.

$$Cot.\ A = cot\ A.$$

$$Cot.\ 2A = \frac{cot\ A - tang\ A}{2}.$$

$$Cot.\ 3A = \frac{r^2\ cot\ A - 3r^2\ tang\ A}{3r^2 - tang^2\ A}.$$

$$Cot.\ 4A = \frac{r^2\ cot\ A - 6r^2\ tang\ A + tang^3\ A}{4r^2 - 4\,tang^2\ A}.$$

$$Cot.\ 5A = \frac{r^2\ cot\ A - 10r^2\ tang\ A + 5\ tang^3\ A}{5r^2 - 10\ tang^2\ A + tang^4\ A}.$$

$$Cot.\ 6A = \frac{r^4\ cot\ A - 15\,r^4\ tang\ A + 15\ r^2\ tang^3\ A - tang^5\ A}{6r^4 - 20\,r^2\ tang^2\ A + 6\ tang^4\ A}.$$

Et en général on aura :

$$Cot.nA = \frac{cot\ A - \frac{n.n-1}{1.2}\,tang^2 A + A\frac{n-2.n-3}{3.4}\,tang^4 A - B\frac{n-4.n-5}{5.6}\,tang^6 A}{n. - \alpha\frac{n-1.n-2}{2.3}\,tang A + \beta\frac{n-3.n-4}{4.5}\,tang^3 A - \gamma\frac{n-5.n-6}{6.7}\,tang^5 A}\ \&c.$$

en faisant le rayon égal à l'unité ; parce qu'en faisant paroître le rayon il eût fallu deux suites pour exprimer les cotangentes d'arcs multiples , suivant que n seroit un nombre pair ou impair.

52. Il est encore visible que l'on pourroit appliquer aux cotangentes d'arcs multiples les deux dernieres formules générales, en commençant par les termes de la plus haute puissance , puisque les coefficients sont toujours les mêmes. On peut encore se servir des formules précédentes, pour transformer des puissances de tangentes en tangentes d'arcs simples & d'arcs multiples. Ainsi l'on formera aisément la table suivante par de simples substitutions ; en supposant T′, T″ T‴ désignant les tangentes des arcs multiples. Que

$$T^1 = T.$$

$$T^2 = \frac{T'' - 2T}{T''}.$$

$$T^3 = \frac{3T''T + 6T'''T + 2T'''T''}{T''}.$$

$$T^4 = \frac{-12TT'' - 24TT''' + 8T''T''' - T^{IV} - 12TT^{IV} + 6T''T^{IV}}{T''T^{IV}}.$$

Il en seroit de même des autres puissances.

COROLLAIRE.

53. Il suit encore delà que pour avoir toutes les tangentes depuis zéro de degrés jusqu'à 90°, il suffit de les trouver jusqu'à 30°. Car si l'on nomme B un arc de cercle moindre que 30°, & que l'on ait $A = 30^\circ - B$. On aura aussi $2A = 60^\circ - 2B$. & $cot\ 2A = tang\ (30^\circ + 2B)$. Donc à cause de la formule $cot\ 2A = \frac{cot\ A - tang\ A}{2}$ on aura $tang\ (30^\circ + 2B) = \frac{cot\ (30^\circ - B) - tang\ (30^\circ - B)}{2}$; d'où l'on voit comment il a été facile de diminuer singuliérement le calcul des tables des tangentes, comme nous avons déja fait voir sur les sinus & cosinus.

PREMIER SCHOLIE.

54. Non-seulement on peut trouver par les formules que nous avons donnés dans les suites générales précédentes, les sinus, cosinus, tangentes & cotangentes d'arcs multiples; mais on peut encore en faire usage pour trouver les *sinus*, *cosinus* &c. d'un angle ou d'un arc sous-multiple dans tel rapport que l'on voudra; mais alors on aura des équations de différents degrés à résoudre, ce qui peut apporter de très-grands avantages dans la résolution de ces équations par le cercle; puisque les tables des sinus étant toutes dressées, contiennent aussi les racines de ces équations : par exemple, si l'on veut diviser un arc en trois ou en cinq parties égales par le moyen de son sinus ou de son cosinus, on n'aura qu'à faire $sin.\ nA = a$, & $cos.\ nA = b$; ensuite on n'aura qu'à traiter s & c comme inconnues en les désignant par x & y, les formules B & D donneront les équations suivantes. $4x^3 - 3r^2x + ar^2 = 0$ & $4y^3 - 3r^2y - br^2b = 0$. De même si l'on nomme c la tangente nA, z la tangente de l'arc simple désigné par A, & qu'on fasse $n = 3$; la formule de l'article 49, donnera l'équation suivante $z^3 - 3cz^2 - 3r^2z + rc^2 = 0$; qui toutes, comme on le voit, sont du troisieme

degré, ce qui fait voir que le problême de la trisection de l'angle est toujours solide de quelque maniere que l'on s'y prenne pour le résoudre : on tombera toujours dans des équations finies, tant que n sera un nombre entier ou commensurable. Pareillement si l'on cherchoit par les cotangentes en faisant $cot. nA = d$ & $cot A = u$, on trouveroit encore cette équation, $u^3 + 3u^2d + dru - 3r^3 = 0$ qui ne differe de la derniere que par les signes.

SECOND SCHOLIE.

55. Pour éviter la confusion, nous avons supprimé dans la plupart des formules précédentes les variations dont elles sont susceptibles, eu égard aux changements des signes ; mais au moyen des réflexions suivantes on sera toujours à portée de connoître ce qu'ils indiquent, lorsqu'ils pourront avoir lieu. Soit donc l'arc AM (*fig.* 7) que nous supposons moindre que 90° ; si l'on regarde comme positifs son sinus MP, son cosinus CP, sa tangente AT & sa cotangente BR ; on verra que le sinus & la tangente de l'angle obtus ACm ou de l'arc Am seront encore positifs, parce qu'ils conservent la même situation à l'égard du diametre AD ; mais le cosinus Cp & la cotangente Br deviennent négatifs, parce qu'ayant la même origine ils s'étendent dans des directions opposées à celles qu'avoient ces mêmes lignes, lorsqu'elles étoient rapportées à l'angle aigu. Si l'arc AM devient A$m\mu$, le sinus, la tangente, le cosinus & la cotangente deviennent tous négatifs, tant que cet arc est plus grand que 180° & moindre que 270°. Enfin s'ils passent les trois quarts du cercle, on verra aisément que le sinus & la tangente deviennent négatifs, tandis que le cosinus & la cotangente redeviennent positifs. Comme dans les calculs trigonométriques on n'employe jamais que des angles droits obtus ou aigus ; toutes les considérations des signes se réduisent à examiner dans quel cas les formules dont on fait

ufage, indiquent un angle obtus ou aigus. D'après nos fuppofitions fi l'on trouve que l'expreffion d'un cofinus ou d'une cotangente devienne négative, cela indique que l'angle auquel ces lignes appartiennent, eft obtus.

Préparation aux Théorêmes fuivants.

56. Soit PE (*fig.*8) l'arc que nous avons défigné par A & PB celui que nous avons nommé B. Du point B foient tirées les lignes BK & BH refpectivement perpendiculaires aux lignes DE & CP. De plus ayant mené les lignes BE & BO aux extrémités de la corde EO foient encore abaiffées fur ces lignes les perpendiculaires CT, CR terminées à la tangente RBT; cette conftruction bien entendue on verra 1° que l'arc BO $= A + B$. 2° que BE $= A - B$. 3° que KO $= \mathit{fin}\, A + \mathit{fin}\, B$; 4° que KE $= \mathit{fin}\, A - \mathit{fin}\, B$. 5° que KM $= \mathit{cof}\, B + \mathit{cof}\, A$, & que 6° KB $= \mathit{cof}\, B - \mathit{cof}\, A$. 7° que BT $= \mathit{tang}\, (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$; 8° que BR $= \mathit{tang}\, (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. 9° que AL $= \mathit{fin}\, (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$ & CL $= \mathit{cof}(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$. 10° que BF $= \mathit{fin}(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$ & CF $= \mathit{cof}\, (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. 11°. que OM $= 2CF = 2\mathit{cof}\, (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. Car l'arc MO $= MN + NO$; mais NO $= 180° - A$ & MN $= B$. Donc $\frac{MO}{2} = \mathit{fin}\, (90° - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$, donc MO $= 2\mathit{cof}\, (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. 12° on fera voir de même que ME $= 2CL = 2\mathit{cof}\, (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$. Cela pofé, les Théorêmes fuivants n'auront aucune difficulté.

THÉOREME VII.

57. *Suppofant toutes chofes comme dans la conftruction précédente ; je dis que l'on aura* 1° $\mathit{fin}\, A + \mathit{fin}\, B = 2\mathit{fin}\, (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \mathit{cof}(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. 2° que $\mathit{fin}\, A - \mathit{fin}\, B = 2\mathit{cof}(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \mathit{fin}\, (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles MKO, CLA font évidemment femblables à caufe que l'angle en M du premier eft

égal à l'angle en C du second, on aura donc la proportion OK : OM : : AL : CA; ou en substituant à ces lignes leurs expressions en sinus & cosinus ; $sin\ A + sin\ B : 2cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :: sin\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$, d'où l'on tire la premiere partie du Théorême, en faisant le rayon égal à l'unité. *C*, Q, *F*1°, *D*.

2°. A cause des triangles semblables EKB, CLA on aura encore EK : EB : : CL : CA ou $sin\ A - sin\ B : 2sin\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :: cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$ d'où l'on tire la seconde partie du Théorême. *C*. Q. *F*. 2°, *D*.

Théoreme VIII.

58. *Je dis de plus que l'on aura encore les deux équations suivantes.* 1°. $Cos\ A + cos\ B = 2cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. 2°. $cos\ B - cos\ A = 2sin\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times sin\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

Démonstration.

Les mêmes triangles semblables MKO, CLA, EKB donnent encore les deux analogies suivantes MK : MO : : CL : CA ; & BK : BE : : AL : CA ; dans lesquelles substituant les valeurs de chaque terme ou trouvera $cos\ A + cos\ B : 2cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :: cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$; 2° $cos\ B - cos\ A : 2cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) :: sin\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$; d'où l'on tire sur le champ les deux équations qu'il falloit démontrer. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

59. Donc on aura $\frac{sin\ A + sin\ B}{sin\ A - sin\ B} = \frac{2sin\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{2cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times sin\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \frac{tang\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{tang\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = tang\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cot\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ en substituant la tangente au lieu de $\frac{sin}{cos}$.

Corollaire II.

60. Donc $\frac{sin\ A + sin\ B}{cos\ A + cos\ B} = \frac{2sin\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{2cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$

$= tang\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ en effaçant ce qui se détruit, & substituant *tang* pour $\frac{sin}{cos}$.

COROLLAIRE III.

61. De même on trouvera que $\frac{sin\ A - sin\ B}{cos\ A + cos\ B} = \frac{2cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{2cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) \times cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)} = tang\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; enfin l'on fera voir de la même maniere que $\frac{sin\ A - sin\ B}{cos B - cos A} = cot\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, & que $\frac{cos B + cos A}{cos\ B - cos A} = \frac{cot\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B}{tang\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B} = cot\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cot\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

COROLLAIRE IV.

62. On trouveroit encore par des simples substitutions que $\frac{sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \times cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \times cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{sin(A+B)}{sin(A-B)}$; cela est une conséquence immédiate de ce que nous avons démontré (n°. 13) $R : cos \frac{1}{2}A :: 2 sin \frac{1}{2}A : sin A$, en faisant $A = A + B$. On trouveroit de même que $\frac{cos(A+B)}{cos(A-B)} = \frac{RR - 2 sin^2 \left(\frac{A+B}{2}\right)}{RR - 2 sin^2 \left(\frac{A-B}{2}\right)}$. Enfin l'on pourroit encore déduire des différents triangles semblables que nous présente la figure 8, un grand nombre d'autres propriétés; par exemple, du quadrilatere MOBE inscrit au cercle, on tireroit tout de suite les formules que nous avons démontrées au n°. 26 par de simples substitutions. Mais ce que nous venons d'exposer, sera plus que suffisant pour indiquer comment on peut trouver les propriétés dont on pourroit avoir besoin. Il ne nous reste plus qu'à faire quelques applications de ces formules.

Usage de quelques-unes des Formules précédentes dans les Logarithmes.

63. Les formules $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ & $\sin A - \sin B = 2\cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ indiquent comment il faut s'y prendre pour trouver les logarithmes de la somme ou de la différence de deux quantités données : un exemple fera concevoir aisément la pratique de cette opération.

Exemple I.

64. Soient les nombres 8467 & 8635 dont la somme est 17102, de laquelle il s'agit de trouver le logarithme; qu'on suppose ne se pas trouver dans les tables. (Il en seroit de même de deux autres nombres quelconques qui contiendroient même des fractions, & dont les logarithmes seroient donnés). Je me sers de la formule $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Pour avoir d'abord les angles A & B, j'ajoute 6 à la caractéristique des logarithmes des nombres donnés, afin de pouvoir les trouver dans les tables des logarithmes des sinus, parce que ces logarithmes n'ont point de caractéristique au-dessous de 7 ni au-dessus de 9, & je trouve

9,936262 = *log.* 8635 = *log. sin.* 59° 42′ 40″ = A.
9,927730 = *log.* 8467 = *log. sin.* 57° 51′ 16″ = B.

d'où l'on tire $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 58° 46' 58''$ & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 1° 51' 24''$.

Je cherche ensuite les logarithmes du sinus du premier de ces angles & celui du cosinus du dernier : à la somme de ces logarithmes j'ajoute celui du nombre 2; enfin de cette somme j'ôte 10 + 6 ou 16 à cause du rayon qui divise, & des six unités qui ont été ajoutées à la cara-

0,301030 *log. de* 2.
9,932072 *log. sin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.
9,999914 *log. cos.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.
20,233016
4,233016 = *log.* 17102.

ctériſtique, & je trouve que le logarithme de 17102, eſt égal au reſte 4,233016.

EXEMPLE II.

65. Pareillement on pourroit faire uſage des mêmes formules pour conſtruire par les logarithmes une expreſſion plus compliquée telle que feroit celle-ci $r \times \left(\frac{AA + aa - bb}{2Aa}\right)$ dans laquelle on ſuppoſera que r eſt le ſinus total; que A eſt un nombre dont le logarithme = 4,054723; que celui de a=3,108354, & celui de b= 3,876870, ce qui donnera les logarithmes des quantités A^2, a^2 bb en doublant les premiers. Cela poſé, je regarde d'abord les logarithmes de A^2 & a^2 comme ceux des ſinus de deux angles qu'il faut trouver. J'ajoute l'unité à chaque caractériſtique pour en trouver les logarithmes parmi ceux des ſinus. Ayant trouvé les angles qui leur répondent, j'acheve l'opération comme on le voit ici à côté;

$log. A^2 = 9,109446 = log. ſin. 7° 23' 32'' = A$
$log. a^2 = 7,216708 = log. ſin. 0\ \ 5\ 40'' = B$

donc on aura $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 3° 44' 36''$
& $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 3° 38' 56''$

0,301030 = *log. de* 2.
8,814845 = *log. ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$
9,999119 = *log. coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.
19,115003

& retranchant 10 + 1 de la caractériſtique du nombre trouvé, j'ai le logarithme de $A^2 + a^2$ = 8,115003; regardant de nouveau ce logarithme comme celui de *ſin* de A, & lui ajoutant l'unité ainſi qu'à celui de b^2, l'opération s'achevera comme on le voit ici, en ſe ſervant de la formule $ſin\ A - ſin\ B = 2 ſin (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) \times coſ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$

9,115003 = *log. ſin.* 7° 29' 16'' donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 5° 22' 11''$
9,753740 = *log. ſin.* 3° 15' 6'' & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 2° 7' 5''$

0,301030 *log.* 2.
8,567716 = *log. ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$
9,998091 = *log. coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.
18,866837
7,866837 = *log.* $A^2 + a^2 - b^2$.

0,301030 *log. de* 2.
4,054723 *log. de* A.
3,108354 *log. de* a.
7,464107 *log de* 2Aa.

$$17{,}866837 \ \textit{log. de} \, (AA + aa - bb) \times R.$$
$$\underline{7{,}464107}$$
$$10{,}402730 \ \textit{log. de} \ \frac{(AA + aa - bb) \times R}{2Aa}.$$

De l'usage du Complément arithmétique.

66. Avant de terminer ces observations, il ne sera pas inutile de donner une notion précise de ce que c'est que le complément arithmétique, dont les Géométres se servent souvent pour changer la soustraction en addition. Pour cela soit, par exemple, le nombre 754 à ôter du nombre 896, je vois d'abord que si j'ôtois ce nombre de 1000, & que j'ajoutasse le reste à 896 en ôtant de la somme le chiffre qui se trouveroit au rang des milles, ce seroit comme si je l'ôtois de 896 comme à l'ordinaire. Mais pour ôter ce nombre de 1000, il n'y a qu'à prendre tous les chiffres qui font des 9 avec chacun de ceux du nombre à soustraire, excepté le dernier qui doit faire 10, comme la soustraction le démontre ; le nombre que l'on trouve par cette opération, est, ce que l'on appelle, *Complément arithmétique.* Ainsi dans notre exemple ce nombre est 246 que j'ajoute à 896, en ôtant de la somme 1142 l'unité du rang des milles, j'ai 142 pour le reste cherché.

Corollaire.

67. Il suit delà & des formules $cot\ A = \frac{RR}{tang\ A}$; $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$; $cosec\ A = \frac{R^2}{sin\ A}$, & autres semblables, que les logarithmes de ces quantités se trouveront en ajoutant les compléments arithmétiques des dénominateurs au logarithme du rayon. Ou ce qui revient au même que les logarithmes de ces quantités se trouvent en prenant la différence du logarithme du dénominateur au logarithme du quarré du rayon qui a 20 pour charactéristique.

Scholie.

68. Comme il peut être quelquefois néceſſaire en ſe ſervant des formules que nous venons de démontrer dans le premier Chapitre de faire ſur elles différentes combinaiſons ou ſubſtitutions, & qu'il ſeroit incommode de les chercher dans les différents articles où elles ſe trouvent, nous croyons qu'on ſera bien aiſe de les trouver toutes ici réunies ſous un ſeul & même point de vue, ce qui nous ſervira d'ailleurs de renvoi toutes les fois que nous aurons dans la ſuite quelque ſubſtitution à faire. Nous avons eu de plus l'attention de garder par-tout l'homogénéité des termes, afin qu'on ſoit dans le cas d'employer toutes ces formules au beſoin avec plus de confiance.

Table générale des Formules démontrées dans le premier Chapitre.

69. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}A = \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\,\text{ſup. de}\,A.$ $\text{tang.}\,\frac{1}{2}A = \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,\text{ſup.}\,A.$ (n°. 7).

70. $\frac{\text{Sin.}\,A \times R}{\text{coſ.}\,A} = \text{tang.}\,A$ (n°. 9). $= \frac{\text{ſin.}\,A \times \text{ſec.}\,A}{R}$

71. $\frac{\text{Coſ.}\,A \times R}{\text{ſin.}\,A} = \text{cot.}\,A$ (n°. 10). $= \frac{RR}{\text{tang.}\,A.}$

72. $\text{Sin.}\,2A = \frac{\text{coſ.}\,A \times 2\,\text{ſin.}\,A}{R}$ (n°. 13). $\text{coſ.}\,2A = \frac{2\,\text{coſ}^2 A - RR}{R}$

73. $\frac{\text{Sin.}\,2A}{2\,\text{ſin.}\,A} = \frac{\text{coſ.}\,A}{R} = \frac{R^2 - 2\,\text{ſin}^2\,\frac{1}{2}A}{RR}$ (n°. 21).

74. $\frac{1}{2}\,\text{Sin.}\,2A = \frac{\text{coſ.}\,A \times \text{ſin}\,A}{R} = \frac{\text{ſin}^2 A \times \text{cot.}\,A}{RR} = \frac{\text{ſin}^2\,A}{\text{tang.}\,A}$ (n°. 15).

75. $R + \text{coſ.}\,A = \frac{2\,\text{coſ}^2\,\frac{1}{2}A}{R} = \frac{\text{ſin.}\,A \times R}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}A}$ (n°. 21). $= \text{ſin. V.}\,A.$ (n°. 22)
$R + \text{ſin.}\,A = 2\,\text{ſin}^2\,(45° + \frac{1}{2}A).$

76. $R - \text{coſ.}\,A = \frac{2\,\text{ſin}^2\,\frac{1}{2}A}{R} = \frac{\text{ſin.}\,A \times \text{tang.}\,\frac{1}{2}A}{R}$ (n°. 21). $=$
$\text{ſin. v.}\,A$ (n°. 22). $R - \text{ſin.}\,A = 2\,\text{ſin}^2\,(45° - \frac{1}{2}A).$

77. $\frac{R + \text{coſ.}\,A}{R - \text{coſ.}\,A} = \frac{\text{cot}^2\,\frac{1}{2}A}{RR}$; $\frac{R - \text{coſ.}\,A}{R + \text{coſ.}\,A}\ \frac{\text{tang}^2\,\frac{1}{2}A}{RR}$ (n°. 22).

78. $\frac{R + \textit{sin. } A}{R - \textit{sin. } A} = \frac{\textit{sin}^2\ (45^\circ + \frac{1}{2} A)}{\textit{sin}^2\ (45^\circ - \frac{1}{2} A)}$ (n°. 22).

79. $\textit{Tang. } A = \frac{RR - \textit{tang}^2 \frac{1}{2} \textit{comp. } A}{2\textit{tang. } \frac{1}{2} \textit{comp. } A.}$ (n°. 20).

80. $\textit{Cot. } A = \frac{RR - \textit{tang}^2\ \frac{1}{2} A}{2\textit{tang. } \frac{1}{2} A.}$ (n°. 20).

81. $\textit{Sec. } A = \frac{RR}{\textit{cos. } A} = \frac{\textit{tang. } A \times R}{\textit{sin. } A}$ (n°s. 15 & 70).

82 & 83. $\textit{Cosec. } A = \frac{RR}{\textit{sin. } A.}$ (n°. 15). $\frac{\textit{sec. } A \times R}{\textit{cosec. } A} = \frac{\textit{sin. } A}{\textit{cos. } A} \times R = \textit{tang. } A$ (n. 16)

84. $\textit{Sec. } A = \textit{cot. } \frac{1}{2} \textit{comp. } A - \textit{tang. } A$ (n°. 18). $= \textit{tang. } A + \textit{cot. } \frac{1}{2} A$ (n°. 19)

$= \frac{\textit{cot. } (45^\circ - \frac{1}{2} A) + \textit{cot. } \frac{1}{2} A}{2.} = \frac{\textit{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} A) + \textit{cot. } \frac{1}{2} A}{2.}$

85. $\textit{Cosec. } A = \textit{cot. } \frac{1}{2} A - \textit{cot. } A$ (n°. 18). $= \textit{cot. } A + \textit{tang. } \frac{1}{2} A$ (n°. 19).

$= \frac{\textit{cot } \frac{1}{2} A + \textit{tang. } \frac{1}{2} A}{2}.$

86. $\textit{Sin. } (A \pm B) = \frac{\textit{sin. } A \times \textit{cos. } B \pm \textit{sin. } B \times \textit{cos. } A}{R}$ (n°. 23).

87. $\textit{Cos. } (A \pm B) = \frac{\textit{cos. } A \times \textit{cos. } B \mp \textit{sin. } A \times \textit{sin. } B}{R}.$ (n°. 24).

88. $\frac{\textit{Sin. } (A + B)}{\textit{sin. } (A - B)} = \frac{\textit{tang. } A + \textit{tang. } B}{\textit{tang. } A - \textit{tang } B}$ (n°. 25) $=$

$\frac{\textit{sin. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \textit{cos. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)}{\textit{sin. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B) \times \textit{cos. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)}.$ (n°. 62).

89. $\frac{\textit{Cos. } (A + B)}{\textit{cos. } (A - B)} = \frac{\textit{cot. } B - \textit{tang. } A}{\textit{cot. } B + \textit{tang. } A}$ (n°. 25). $=$

$\frac{(R + \sqrt{2}\ \textit{sin. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)) \times (R - \sqrt{2}\ \textit{sin. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B))}{(R + \sqrt{2}\ \textit{sin. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)) \times (R - \sqrt{2}\ \textit{sin. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)).}$ (n°. 26).

$= \frac{R^2 - 2\textit{sin}^2\ (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)}{R^2 - 2\textit{sin}^2\ (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)}.$ (n°. *idem.*

90. $\textit{Sin. } (30^\circ + A) = \textit{cos. } A - \textit{sin. } (30^\circ - A)$. (n°. 27).

91. $\textit{Cos. } (30^\circ + A) = \textit{cos. } (30^\circ - A) - \textit{sin. } A$. *idem.*

92. $\textit{Sin. } A + \textit{sin. } B = 2\textit{sin. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \textit{cos. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. (n°. 57).

93. $\textit{Sin. } A - \textit{sin. } B = 2\textit{cos. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \textit{sin. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. (n°. 57).

94. $\textit{Cos. } A + \textit{cos. } B = 2\textit{cos. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \textit{cos. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$. (n°. 58).

95. $\textit{Cos. } B - \textit{cos. } A = 2\textit{sin. } (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \textit{sin. } (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B.)$ (n°. 58).

96. $\frac{\text{Sin. A} + \text{sin. B}}{\text{sin. A} - \text{sin B}} = \frac{\text{tang.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(\frac{1}{2}A \frac{1}{2}B)}$. (n°. 59).

97. $\frac{\text{Sin. A} + \text{sin. B}}{\text{cos. A} + \text{cos. B}} = \text{tang.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. (n°. 59).

98. $\frac{\text{Sin. A} + \text{sin. B}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \text{cot.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

99. $\frac{\text{Sin. A} - \text{sin B}}{\text{cos. B} + \text{cos. A}} = \text{tang.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

100. $\frac{\text{Sin. A} - \text{sin. B}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \text{cot.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

101. $\frac{\text{Cos.B} + \text{cos.A}}{\text{cos.B} - \text{cos.A}} = \frac{\text{cot.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)} = \frac{\text{sec. A} + \text{sec. B}}{\text{sec. A} - \text{sec. B}}$. (n°. 61).

102. $\text{Sin. A} \times \text{sin. B} = \frac{1}{2}\text{cos.}(A - B) - \frac{1}{2}\text{cos.}(A + B)$. (n°. 26).

103. $\text{Sin. A} \times \text{cos.B} = \frac{1}{2}\text{sin.}(A + B) + \frac{1}{2}\text{sin.}(A - B)$. (n°. 26).

104. $\text{Cos. A} \times \text{sin. B} = \frac{1}{2}\text{sin.}(A + B) - \frac{1}{2}\text{sin.}(A - B)$. (n°. 26).

105. $\text{Cos. A} \times \text{cos. B} = \frac{1}{2}\text{cos.}(A + B) + \frac{1}{2}\text{cos.}(A - B)$. (n°. 26).

106. $\text{Tang.}(A + B) = \frac{(\text{tang. A} + \text{tang. B}) \times RR}{RR - \text{tang. A} \times \text{tang. B}}$. (n°. 45)

107. $\text{Tang.}(A - B) = \frac{(\text{tang. A} - \text{tang. B}) \times RR}{RR - \text{tang. A. tang. B}}$. (n°. 45).

108. $\text{Tang.}(A + 45^\circ) = \frac{(R + \text{tang.A}) \times R}{R - \text{tang. A}}$ (n°. 46) $= \frac{RR}{\text{tang.}(45^\circ - A)}$.

109. Si A excede 45°. $\frac{\text{tang. A} + R}{\text{tang. A} - R} = \frac{R}{\text{tang.}(A - 45^\circ)}$. (n°. 47).



CHAPITRE SECOND.

Des Propriétés générales des Triangles ſphériques rectangles ou non rectangles, & de leur réſolution par analogies.

PREMIERE SECTION.

Des Triangles ſphériques en général.

DÉFINITIONS.

110. TOUTE portion d'une ſurface ſphérique terminée par trois arcs de grand cercle, s'appelle *un Triangle ſphérique.* (fig. 9).

COROLLAIRE.

111. Il ſuit delà que la conſidération des petits cercles de la ſphere n'appartient pas à la Trigonométrie ſphérique, puiſqu'elle n'employe que ceux qui ont le même centre que la ſphere.

112. Tout triangle ſphérique, comme un triangle rectiligne, a eſſentiellement trois côtés & trois angles. Trois de ces ſix parties étant données, comme l'on voudra, la Trigonométrie enſeigne à trouver les autres.

SCHOLIE.

113. Dans la Trigonométrie rectiligne la connoiſſance des trois angles n'eſt pas ſuffiſante pour connoître les trois côtés; dans ce cas on ne peut avoir que les rapports des trois côtés, & non leurs valeurs abſolues; dans la Trigonométrie ſpérique au contraire, les côtés

n'étant que des ſecteurs de cercle dont la valeur dépend du nombre des degrés qu'ils contiennent, la connoiſſance des trois angles donne celle des trois côtés ; ce qui rentre pourtant dans le cas correſpondant de la Trigonométrie rectiligne, à cauſe que chaque degré varie ſuivant le rayon du cercle auquel il appartient. Mais il y a encore une différence plus remarquable entre la Trigonométrie rectiligne & ſphérique, c'eſt que deux angles déterminent le troiſieme dans la Trigonométrie rectiligne, ce qui n'a pas lieu dans la Trigonométrie ſphérique ; d'où il ſuit que la définition, telle que nous venons de la donner, n'a lieu ſtrictement que pour la Trigonométrie ſphérique. C'eſt ce que l'on ſera à portée de voir encore plus clairement par la ſuite.

114. Les côtés d'un triangle ſphérique ne ſont autre choſe que chacun des arcs de grand cercle qui, par leur leur interſection ſur la ſurface de la ſphere, déterminent le triangle ſphérique.

115. L'angle que font entr'eux les ſecteurs de cercle terminés à la ſurface de la ſphere, & que nous venons de nommer côtés du triangle ſphérique, forment ce que l'on appelle angle ſphérique. La Géométrie élémentaire nous apprend que cet angle ſe meſure par celui que forment deux lignes qui partent d'un même point de l'interſection commune des plans qui en forment les côtés ; leſquelles lignes ſont perpendiculaires à cette même commune interſection.

COROLLAIRE.

116. Il ſuit delà que la ſurface d'un triangle ſphérique BAC (*fig.* 9 & 10) & les trois plans qui le terminent, forment une eſpece de Pyramide triangulaire BGCA, dont le ſommet G eſt au centre de la ſphere, la baſe une portion de la ſurface ſphérique, & dont les faces ſont des portions de grand cercle ou ſecteurs circulaires tels que AGC, AGB & BGC, leſquels ſont en même temps les côtés du triangle BAC.

Définitions.

117. Une ligne comme PG*p* perpendiculaire au plan d'un grand cercle, paſſant par le centre de la ſphere & terminée de part & d'autre à ſa ſurface, ſe nomme *l'axe* de ce grand cercle. Les points P, *p* dans leſquels elle rencontre cette ſurface, ſont nommés les *poles* de ce même grand cercle. De plus ſi l'on conçoît une infinité de petits cercles paralleles au premier, cet axe leur ſera auſſi perpendiculaire, & les points P & *p* ſont auſſi les poles de ces mêmes petits cercles.

Corollaire I.

118. Donc chaque pole d'un grand cercle eſt éloigné de tous les points de ſa circonférence de 90°, & tous les arcs menés du pole d'un petit cercle à ſa circonférence ſont tous égaux entr'eux.

Corollaire II.

119. Il ſuit encore delà que tous les arcs de grand cercle menés par le pole d'un cercle quelconque, ſont perpendiculaires à ce grand cercle; car puiſqu'ils ſont des grands cercles, comme on le ſuppoſe, ils paſſent tous par le centre de la ſphere; donc ils paſſent tous par l'axe de ce grand cercle. Il faut dire la même choſe des petits cercles.

Corollaire III.

120. Donc pour trouver le pole d'un cercle quelconque, il n'y a qu'à tracer ſur la ſurface ſphérique deux grands cercles perpendiculaires à ſon plan; les points où ces cercles ſe couperont, ſoit au-deſſus ſoit au-deſſous, ſeront les poles demandés.

Corollaire IV.

121. Il ſuit encore delà que ſi d'un point pris ſur la

ſurface

surface sphérique on veut mener un arc de cercle qui mesure la plus courte distance de ce point à la circonférence d'un cercle quelconque, il faut tracer un arc de cercle dont le prolongement passe par les poles du cercle donné: & réciproquement; si cet arc passe par les poles d'un cercle donné, il mesurera la plus courte distance d'un point donné à la circonférence.

Corollaire V.

122. Si l'on prend sur les côtés AC & BC (*fig.* 10) d'un triangle sphérique BCA des arcs CL & CK de 90° chacun, & qu'ayant tiré les rayons GL & GK, on fasse passer par ces lignes un plan LGK, il est visible que le point C sera le pole de ce cercle; & comme les lignes GK, GL sont perpendiculaires à l'intersection commune des plans AGC, BGC, elles mesurent par leur inclinaison l'angle des mêmes plans, & par conséquent aussi l'angle sphérique BCA.

Corollaire VI.

123. Il est encore visible que tout arc de petit cercle décrit du pole C comme centre, étant d'un même nombre de degrés que l'arc KL est également propre à mesurer le même angle ACB; mais on n'employe communément que des arcs de grand cercle.

Corollaire VII.

124. Donc si un angle sphérique est droit, les deux arcs de grand cercle qui le forment, passent réciproquement par leurs poles. Et si les plans de deux grands cercles renferment leurs axes respectifs, ou passent par les poles l'un de l'autre, l'angle qu'ils comprennent, est un angle droit.

Théoreme I.

125. *Deux côtés quelconques d'un triangle sphérique* BAC

pris ensemble, sont toujours plus grands que le troisieme.

DÉMONSTRATION.

Cette proposition est une suite nécessaire de ce que le chemin le plus court entre deux points pris sur la surface de la sphere, est l'arc de grand cercle qui passe par ces mêmes points. *C. Q. F. D.*

THÉOREME II.

126. *La somme des trois côtés d'un triangle quelconque est toujours moindre que 360°.* (fig. 10).

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés AC & BC d'un angle quelconque jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en *D*. Les arcs DAC, DBC seront chacun de 180°, puisque tous les grands cercles se coupent en deux parties égales. On aura donc DAC + DBC = 360°. Mais par le dernier Théorême DA + DB > AB; donc les trois côtés AB, AC & BC pris ensemble ne valent pas 360°. *C. Q. F. D.*

THÉOREME III.

127. *La somme des trois angles d'un triangle sphérique quelconque, est toujours plus grande que deux angles droits & moindre que six.*

DÉMONSTRATION.

Si les côtés AB, AC & BC du triangle sphérique sont infiniment petits, les intersections que forment entre eux les plans qui déterminent les côtés, seront infiniment près d'être des lignes paralleles; la surface du triangle sphérique sera près de se confondre avec une surface plane. Donc le triangle peut être considéré comme un triangle rectiligne; mais on sait que les angles d'un tel triangle ne valent que deux droits; donc tant que les côtés du triangle sphérique seront d'une grandeur finie, les

angles pris ensemble vaudront toujours plus que deux droits.

2°. L'on voit aisément à l'inspection de la figure 10 que chaque angle du triangle sphérique BAC peut être obtus, de maniere cependant que l'arc qui en est la mesure soit moindre que 180°; puisqu'alors il n'y auroit plus d'angle. Donc en supposant les trois angles obtus, on ne pourra jamais avoir six angles droits pour la somme des trois angles du triangle sphérique. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

128. Donc un triangle sphérique peut avoir ses trois angles droits ou même obtus; d'où il suit que la connoissance de deux angles quelconques ne suffit pas pour faire découvrir le troisieme.

COROLLAIRE II.

129. Si les trois angles d'un triangle sont droits ou obtus, les trois côtés sont aussi de 90° ou plus grands que 90°. Et si ses trois angles sont aigus, les trois côtés sont aussi moindres que 90°; & réciproquement.

SCHOLIE.

130. On voit par ces Théorêmes en quoi les triangles sphériques different essentiellement des triangles rectilignes. D'un autre côté ils ont aussi plusieurs autres propriétés qui leur sont communes avec les triangles rectilignes, & qui se démontrent précisément de la même maniere.

Par exemple, on feroit voir comme dans la Géométrie élémentaire que deux triangles sphériques sont égaux en tout: 1°, lorsque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre; 2°, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux; 3°, lorsqu'ils ont des angles égaux sur des bases égales.

De même on feroit voir qu'un triangle sphérique est équilatéral, isoscele ou scalene, selon qu'il a trois angles

égaux, ou deux angles égaux, ou ſes trois angles inégaux ; & réciproquement ; enfin que le plus grand côté eſt toujours oppoſé au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle. Toutes ces vérités ſe démontrent de la même maniere que ſur les triangles rectilignes, ainſi il ſeroit inutile de s'y arrêter plus long-temps.

THÉOREME IV.

131. *Si des trois angles* B, A, C *d'un triangle ſphérique quelconque* BAC *comme poles, on décrit ſur la ſurface de la ſphere trois arcs de grand cercle* DF, DE, FE *qui, par leur rencontre, forment un nouveau triangle ſphérique* DEF (fig. 11), *chaque côté de ce nouveau triangle ſera ſupplément de l'angle qui eſt à ſon pole, & chaque angle de même triangle ſera ſupplément du côté qui lui eſt oppoſé dans le triangle* BAC.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés AB, AC & BC du triangle BAC juſqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du triangle DEF aux points I, L ; M, N ; G, K : cela poſé, puiſque le point A eſt le pole de l'arc DILE, la diſtance des points A, E eſt de 90°. Et puiſque C eſt le pole de l'arc EF, les points C, E ſont auſſi éloignés de 90°. Donc le point E eſt le pole de l'arc AC (n°. 118). On prouvera de même que F eſt le pole de BC, & D le pole de l'arc AB.

Cette conſtruction bien entendue, on aura DL = 90° IE = 90° ; donc DL + IE, ou DL + EL + LI, ou encore DE + IL = 180°. Donc l'arc DE eſt ſupplément de l'angle BAC meſuré par l'arc IL (n°. 122). On prouvera de même que EF eſt ſupplément de l'angle BCA meſuré par l'arc MN, & que DF eſt ſupplément de l'angle ABC meſuré par GH ; d'où il ſuit que chaque côté du triangle DEF eſt ſupplément de l'angle du triangle BAC qui eſt à ſon pole. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. Les angles de ce même triangle sont suppléments des côtés du triangle ABC; car puisque les arcs AL & BG sont de 90°, on aura AL + BG ou GL + AB = 180°, mais GL est la mesure de l'angle en D (n° 122). Donc AB est supplément de l'angle EDF; on prouveroit de même que AC & BC sont suppléments des angles en E & en F; donc tous les angles du triangle DEF sont suppléments des côtés opposés du triangle BAC. *C. Q. F.* 2°, *D.*

SECONDE SECTION.

De la Résolution des Triangles sphériques rectangles.

Préparation aux Théorêmes suivants. (fig. 12).

132. SOIT une pyramide GBPQ composée de quatre triangles rectangles GBQ, GBP, GPQ, BPQ; & soient AB, AC, & BC trois arcs de cercle décrits du centre G avec le rayon GB; il est visible que ces trois arcs de cercles formeront un triangle sphérique BAC rectangle en A, à cause que les plans GPQ, GBP sont perpendiculaires l'un à l'autre. En faisant le rayon égal à l'unité, on trouvera aisément les valeurs contenues dans la Table suivante pour toutes les parties de ce même triangle. Il suffit, pour les découvrir, de se rappeller que *tang* $= \frac{\textit{sin}}{\textit{cos}}$, que *cot* $= \frac{RR}{\textit{tang.}} = \frac{\textit{cos}}{\textit{sin}}$, & l'on trouvera que

	a pour *sinus*	pour *cos.*	pour *tang.*
1°. L'arc BC ou l'angle QGB	$\frac{BQ}{GQ}$	$\frac{BG}{GQ}$	$\frac{BQ}{BG}$
2°. L'arc BA ou l'angle BGP	$\frac{BP}{GP}$	$\frac{GB}{GP}$	$\frac{BP}{BG}$
3°. L'arc AC ou l'angle PGQ	$\frac{QP}{GQ}$	$\frac{GP}{GQ}$	$\frac{QP}{GP}$
4°. L'angle ABC ou QBP	$\frac{PQ}{BQ}$	$\frac{BP}{BQ}$	$\frac{QP}{BP}$
5°. L'angle BCA	$\frac{BP \times GQ}{BQ \times GP}$	$\frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$	$\frac{BP \times GQ}{PQ \times BG}$

133. Pour démontrer toutes ces expreſſions, il ſuffira de démontrer la premiere ligne ſeulement. Je prends à cet effet une ligne quelconque GR que je regarde comme le ſinus total des tables, & ayant abaiſſé RS perpendiculaire à GB, il eſt viſible que cette ligne ſera le ſinus de l'arc BC, & GS ſera le coſinus du même arc. Cela poſé, les triangles ſemblables GRS, GQB donnent les deux proportions ſuivantes GQ : QB : : GR (1) : RS = *ſin* BC $= \frac{QB}{GQ}$ & GQ : GB : : GR (1) : GS = *coſ* BC $= \frac{GB}{GQ}$. D'où l'on tire ſur le champ *tang* BC $= \frac{BQ}{BG}$ & *cot* BC $= \frac{BG}{BQ}$. Les autres valeurs ſe démontrent préciſément de la même maniere. Pour démontrer les Théorêmes ſuivants, il ſuffira de ſubſtituer dans chacun en particulier les valeurs des termes de chaque proportion à démontrer, & l'on trouvera par-tout une égalité parfaite entre le produit des extrêmes & celui des moyens.

THÉOREME I.

134. *Dans un triangle ſphérique quelconque rectangle* BAC, *le ſinus total eſt au ſinus de l'hypoténuſe, comme le ſinus d'un angle eſt au ſinus du côté qui lui eſt oppoſé ; & réciproquement.* (fig. 13).

N. B. C'eſt par ce Théorême qu'on a trouvé les expreſſions du ſinus & coſinus de l'angle BCA, ainſi que celle de ſa tangente & cotangente.

THÉOREME II.

135. *Dans un triangle ſphérique rectangle on aura toujours, le rayon eſt au coſinus d'un angle, comme la tangente de l'hypoténuſe eſt à la tangente du côté adjacent à cet angle ;* c'eſt-à-dire, que R : *coſ* B : : *tang* BC : *tang* AB; ou R : *coſ* C : : *tang* BC : *tang* AC.

THÉOREME III.

136. *On aura de plus dans tout triangle rectangle, le sinus total est au cosinus d'un des côtés, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse, ou ce qui revient au même* R : *cos* AB : : *cos* AC : *cos* BC.

THÉOREME IV.

137. *On aura encore, le rayon est au sinus d'un angle, comme le cosinus du côté adjacent est au cosinus de l'autre angle;* ou R : *sin* B ou *sin* C : : *cos* AB ou *cos* AC : *cos* C ou *cos* B.

THÉOREME V.

138. *Le rayon est au sinus d'un côté, comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à la tangente de l'autre côté,* ou R : *sin* AB : : *tang* B : *tang* AC : ou R : *sin* AC : : *tang* C : *tang* AB.

THÉOREME VI.

139. *Le rayon est à la cotangente d'un angle, comme la cotangente de l'autre angle est au cosinus de l'hypoténuse; ou ce qui revient encore au même, le rayon est au cosinus de l'hypoténuse, comme la tangente d'un angle est à la cotangente de l'autre angle.* Ou R : *cot* B : : *cot* C : *cos* BC; ou encore R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* C : : *tang* C : *cot* B.

COROLLAIRE I.

140. Il suit du Théorême second que si deux triangles sphériques rectangles ont un côté commun, les tangentes des hypoténuses sont en raison inverse des cosinus des angles adjacents à ce même côté.

COROLLAIRE II.

141. Il suit de même du troisieme Théorême que si deux triangles sphériques rectangles ont un côté commun,

les cosinus de leurs hypoténuses sont comme les cosinus des côtés non communs.

COROLLAIRE III.

142. Il suit aussi du quatrieme Théorême que si deux triangles rectangles ont un côté commun, les cosinus des angles opposés à ce côté sont entr'eux comme les sinus des angles adjacents.

COROLLAIRE IV.

143. Il suit aussi du cinquieme Théorême que si deux triangles rectangles ont un côté commun, les sinus des côtés non communs sont réciproquement comme les tangentes des angles sur les côtés.

COROLLAIRE V.

144. Enfin si deux triangles sphériques rectangles ont un angle commun, les sinus de leurs hypoténuses sont comme les sinus des côtés opposés à l'angle commun, & les tangentes des mêmes côtés sont comme les sinus des côtés adjacents à l'angle commun. Ces vérités se déduisent immédiatement la premiere du premier Théorême, & la seconde du cinquieme.

SCHOLIE.

145. Ces six Théorêmes suffisent pour résoudre tous les cas possibles des triangles sphériques rectangles, comme on peut s'en convaincre par la Table que nous joignons ici; néanmoins comme il y auroit encore quelque difficulté à les retenir, & qu'il seroit dangereux de les confondre, nous ajouterons encore le Théorême de Neper qui les réduit tous à deux cas généraux dont on peut se souvenir bien plus aisément, pourvu que l'on ait bien entendu les définitions suivantes, qui sont absolument nécessaires pour son intelligence.

DÉFINITIONS.

146. Lorſque trois parties d'un triangle ſont tellement diſpoſées que deux d'entr'elles touchent immédiatement la troiſieme, ou n'en ſont ſéparées que par l'angle droit, ces deux parties ſe nomment *Adjacentes* à la troiſieme que l'on nommera partie *moyenne*.

147. Lorſque trois parties d'un triangle rectangle ſont tellement diſpoſées qu'entre l'une des trois que nous regarderons toujours comme *moyenne* & chacune des deux autres, il ſe trouve toujours une autre partie du même triangle; ces deux parties ſeront nommées parties *ſéparées*. L'angle droit eſt cenſé ne point ſéparer les parties entre leſquelles il ſe trouve. Cela poſé.

Si les parties moyennes ſont	Les adjacentes ſeront	Et les parties ſéparées ſont
AB	AC & B	BC & C
AC	AB & C	BC & B
BC	B & C	AC & AB
B	AB & BC	AC & C
C	AC & BC	AB & B.

THÉOREME GÉNÉRAL.

148. *Dans un triangle ſphérique rectangle ſi l'on ſubſtitue aux côtés de l'angle droit les compléments de ces côtés, on aura dans tous les cas, le produit du ſinus total par le coſinus de la partie moyenne égal au rectangle des cotangentes des parties adjacentes, ou au rectangle des ſinus des parties ſéparées.*

DÉMONSTRATION.

On a eu ſoin de détailler dans la table pour les réſolutions des triangles rectangles, tous les cas du Théorême préſent, en déſignant par un *A* les cas qui ont rapport aux parties adjacentes, & par une *S* ceux où les parties ſont ſéparées. Ainſi la vérité du Théorême générale eſt démontrée par celle des Théorêmes particuliers correſpondants aux mêmes cas. On peut néanmoins le démontrer directement par la table du n°. 132, en

ſubſtituant à chaque terme les valeurs qui conviennent ; par exemple, pour démontrer la premiere ligne du n°. 147. Tout ſe réduit à prouver que R × *ſin* AB = *tang* AC × *cot* B = *ſin* BC × *ſin* C. Prenant donc les expreſſions de ces lignes au n°. 132. on aura

$$R \times \frac{BP}{GP} = \frac{QP}{GP} \times \frac{BP}{QP} = \frac{BQ \times BP \times GQ}{GQ \times BQ \times GP},$$ ce qui eſt évident après avoir effacé les termes qui ſe détruiſent aux deux dernieres fractions. Il en ſeroit ainſi des autres, d'où l'on doit conclure la vérité de notre Théorême dans tous les cas poſſibles. *C. Q. F. D.*

De la valeur des Angles d'un Triangle rectangle eu égard aux côtés qui comprennent l'angle droit.

Théoreme.

149. *Dans un triangle quelconque rectangle* BAC, *ou* bAC, *les angles ſur l'hypoténuſe ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés ; 2°, l'hypoténuſe eſt moindre ou plus grande qu'un quart de cercle* (fig. 13) *ſuivant que les côtés de l'angle droit ſont de même ou de différente eſpece, c'eſt-à-dire, ſuivant que ces mêmes côtés ſont tous deux aigus ou obtus, ou que l'un eſt aigu & l'autre obtus.*

Démonstration.

1°, Si les côtés AB, AC de l'angle droit BAC ſont chacun de 90°, à cauſe de l'angle A qui eſt droit, comme on le ſuppoſe, les points B & C deviendront les poles des arcs AC & AB, & par conſéquent les angles B & C ſont des angles droits, puiſqu'ils ſont meſurés par les arcs que nous ſuppoſons de 90°, c'eſt-à-dire, que ces angles ſont de même nature que les côtés oppoſés. De plus ſi les côtés AB & AC ſont aigus, les angles qui leur ſont oppoſés, le ſeront auſſi ; ce que l'on prouvera aiſément comme il ſuit. Soit prolongé le côté AC en F juſqu'à ce

que AF ſoit de 90°; le point F ſera le pole de l'arc AB (n°. 117). Ce qui donne l'angle B auſſi de 90°, & par conſéquent l'angle ABC néceſſairement aigu, puiſqu'il eſt moindre que l'angle ABF. On prouveroit de même que l'angle en C eſt aigu, lorſque le côté AB qui lui eſt oppoſé, eſt moindre que 90°. De plus il n'eſt pas moins viſible que les angles B & C du triangle B*a*C rectangle en *a* ſont obtus, lorſque les côtés *a*B & *a*C qui leur ſont oppoſés, ont plus de 90°. 3°, Si l'un des côtés A*b* eſt obtus & l'autre côté AC aigu comme au triangle rectangle *b*AC, l'angle en C ſera auſſi obtus, & l'angle en *b* ſera aigu. Car ayant pris ſur AB*b* l'arc AG de 90°, & tiré du point G au point C l'arc GC, l'angle ACG ſera droit, puiſque G eſt le pole de l'arc AC (n°. 119); d'où il ſuit néceſſairement que l'angle AC*b* ſera obtus. Par la même raiſon l'angle *ab*C eſt obtus au triangle rectangle *ba*C à cauſe qu'il eſt oppoſé au côté *a*C obtus; donc ſon ſupplément A*b*C ſera aigu, c'eſt-à-dire, de même eſpece que le côté qui lui eſt oppoſé. Donc en général les angles ſur l'hypoténuſe ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°, Il eſt viſible que l'hypoténuſe BC du triangle BAC eſt moindre que BF, ainſi que lorſqu'elle eſt hypoténuſe du triangle B*a*C; l'hypoténuſe *b*C eſt plus grande que *b*F au triangle *ba*C; d'où il ſuit que l'hypoténuſe d'un triangle rectangle quelconque eſt toujours moindre que 90°, lorſque les deux côtés ſont de même eſpece, & qu'elle eſt plus grande, lorſque les deux côtés ſont de différentes eſpeces. *C. Q. F.* 2°, *D.*

On voit aiſément que le réciproque de ce Théorême eſt vrai dans toutes ſes parties, c'eſt-à-dire, que ſi les angles ſur l'hypoténuſe ſont de même ou de différente eſpece, les côtés qui leur ſont oppoſés, ſeront auſſi dans le même cas. 2°, Que ſi ſes côtés ſont encore de même eſpece ou de différente eſpece, l'hypoténuſe ſera

plus petite ou plus grande qu'un quart de cercle, & qu'elle ſera préciſément de 90°, s'il y a un ou deux côtés de 90°.

PROBLEME I.

150. *L'hypoténuſe* BC *d'un triangle ſphérique rectangle* BAC *avec la ſomme ou la différence des deux côtés* AB, AC *étant connues; déterminer le triangle.* (fig. 13).

SOLUTION.

Puiſque l'on a (n°. 136) R : *coſ* AB : : *coſ* AC : *coſ* BC, on aura auſſi *coſ* AB × *coſ* AC = R × *coſ* BC. Mais (n°. 105) *coſ* AB × *coſ* AC = $\frac{1}{2}$ *coſ*(AB + AC) + $\frac{1}{2}$ *coſ*(AB — AC). Ce qui donne ſur le champ 2R × *coſ* BC — *coſ* (AB + AC) = *coſ* (AB — AC). Ou 2R × *coſ* BC — *coſ*(AB — AC) = *coſ* (AB + AC). *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

151. Donc ſi les côtés du triangle ſont égaux, on aura 2 *coſ* BC — R = *coſ* 2 AB ou *coſ* 2 AC, ce qui apprend que dans ce cas le coſinus du double d'un des côtés eſt égal au double du coſinus de l'hypoténuſe moins le ſinus total.

PROBLEME II.

152. *Connoiſſant un côté quelconque avec la ſomme ou la différence de l'hypoténuſe, & de l'autre côté trouver l'hypoténuſe.*

SOLUTION.

Puiſque l'on a R : *coſ* AB : : *coſ* AC : *coſ* BC (n°. 136) on aura auſſi *componendo & detrahendo* R + *coſ* AB : R — *coſ* AB : : *coſ* AC + *coſ* BC : *coſ* AC — *coſ* BC. Ce qui devient par les n°. 77 & 101. *cot* $\frac{AB}{2}$: *tang* $\frac{AB}{2}$: : *cot* $\left(\frac{BC + AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BC - AB}{2}\right)$. D'où il ſuit que ſi l'on connoît la ſomme ou la différence de l'hypoténuſe & de

l'autre côté, cette analogie fera trouver la différence ou la somme de la même hypoténuse & de l'autre côté.

PROBLEME III.

153. *Connoissant un des angles sur l'hypoténuse avec la somme ou la différence de l'hypoténuse & du côté adjacent dans un triangle rectangle, résoudre ce même triangle.*

SOLUTION.

Puisque l'on a R : *cos* B : : *tang* BC : *tang* AB (n°. 135); on a aussi *addendo & detrahendo* R + *cos* B : R — *cos* B : : *tang* BC + *tang* AB : *tang* BC — *tang* AB, ce qui devient par les n°. 77 & 88. R^2 : $cot^2 \frac{1}{2}$ B, ou *tang* $\frac{1}{2}$ B : *cot* $\frac{1}{2}$ B : : *sin* (BC + AB) : *sin* (BC — AB). *C. Q. F. T.*

PROBLEME IV.

154. *Connoissant l'hypoténuse & la somme ou la différence des angles sur l'hypoténuse, trouver ces mêmes angles.*

SOLUTION.

Par le n°. 139, on a R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* C, ce qui donne en opérant comme au dernier problême, R^2 : $tang^2 \frac{1}{2}$ BC : : *cos* (B + C) : *cos* (B — C) d'où suit la solution demandée. Et si les deux angles sont égaux, on aura $tang^2 \frac{1}{2}$ BC : R^2 : : R : *cos* 2B. *C. Q. F. T.*

PROBLEME V.

155. *Connoissant dans deux triangles* BAC, BDG *qui ont un angle commun, les côtés* AC, DG *opposés à cet angle avec la somme ou la différence des hypoténuses, déterminer ces triangles.* (fig. 14).

SOLUTION.

Puisque l'on a *sin* DG : *sin* AC : : *sin* BG : *sin* BC; on aura aussi *addendo & detrahendo* *sin* DG + *sin* AC : *sin* DG — *sin* AC : : *sin* BG + *sin* BC : *sin* BG —

ſin BC. Donc on aura (n°. 96) *tang* $\left(\frac{DG+AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{DG-AC}{2}\right)$: : *tang* $\left(\frac{BG+BC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BG-BC}{2}\right)$; d'où il eſt aiſé de réſoudre le problême, puiſque l'on aura toujours trois termes de connus dans cette proportion. *C. Q. F. T.*

PROBLEME VI.

156. *Suppoſant toujours deux triangles qui ont un angle commun, & que l'on connoît les côtés oppoſés à cet angle avec la différence ou la ſomme des côtés adjacents, déterminer chacun de ces triangles.*

SOLUTION.

Puiſque l'on a *tang* DG : *tang* AC : : *ſin* BD : *ſin* BA, on aura auſſi *tang* DG + *tang* AC : *tang* DG — *tang* AC : : *ſin* BD + *ſin* BA : *ſin* BD — *ſin* BA. D'où l'on tire par des ſubſtitutions ſemblables aux précédentes *ſin* (DG + AC) : *ſin* (DG — AC) : : *tang* $\left(\frac{BD+BA}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BD-BA}{2}\right)$. *C. Q. F. T.*



TROISIEME SECTION.

De la Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

THÉOREME I.

157. DANS *un triangle sphérique quelconque* BAC, *les sinus des angles sont entr'eux comme les sinus des côtés qui leur sont opposés.* (fig. 15).

DÉMONSTRATION.

D'un angle quelconque A du triangle sphérique BAC soit abaissé l'arc AD perpendiculaire à la base BC. Cela posé dans chaque triangle rectangle BAD, CAD on aura (n°. 134). R : *sin* AB : : *sin* B : *sin* AD. Et R : *sin* AC : : *sin* C : *sin* AD. D'où l'on tire sur le champ *sin* AB × *sin* B = *sin* AC × *sin* C, ce qui donne la proportion

Sin B : *sin* C : : *sin* AB : *sin* AC. *C. Q. F. T.*

DÉFINITIONS.

158. Les angles BAD, CAD (*fig.* 15) que forment les côtés AB, AC de l'angle BAC avec la perpendiculaire, seront nommés les *Segments de l'angle vertical*, soit que la perpendiculaire tombe en dedans, soit qu'elle tombe au dehors du triangle BAC.

Seconde. De même les parties BD & DC du côté BC comprises entre les points B & C, & le point D où ce côté est rencontré par la perpendiculaire AD, se nommeront les *Segments de la base;* soit que cette base soit prolongée ou non.

Troisieme. Si l'on considere les segments BAD, CAD de l'angle BAC, les côtés AB, AC du même angle seront nommées *Parties adjacentes*, parce qu'elles

le font en effet. Et les angles B & C fur la bafe BC feront des *Parties féparées*, à caufe qu'en effet il fe trouve entre ces angles & les fegments les côtés BA & CA.

Quatrieme. Si l'on confidere les fegments BD & CD de la bafe, les angles B & C feront les *parties adjacentes*, & les côtés BA & CA feront nommés *parties féparées* à l'égard des mêmes fegments de la bafe. Cela pofé, il fera facile de retenir les deux parties du Théorême fuivant.

THÉOREME.

159. Si d'un angle A quelconque d'un triangle fphérique BAC on abaiffe une perpendiculaire AD fur le côté BC prolongé : s'il eft néceffaire, on aura toujours,

1°. *Les finus des fegments de l'angle comme les cofinus des parties féparées ; & les cofinus des mêmes fegments comme les cotangentes des parties adjacentes.*

2°. *Les finus des fegments de la bafe comme les cotangentes des parties adjacentes ; & les cofinus des fegments de la même bafe comme les cofinus des parties féparées.*

Il faut donc prouver 1°. que *fin* BAD : *fin* CAD : : *cof* B : *cof* C.
2°. que *cof* BAD : *cof* CAD : : *cot* AB : *cot* AC.
3°. que *fin* BD : *fin* CD : : *cot* B : *cot* C.
4°. que *cof* BD : *cof* CD : : *cof* AB : *cof* AC.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle rectangle BDA on aura par le Théorême IV.

R : *cof* AD : : *fin* BAD : *cof* B, & le triangle rectangle CDA donne auffi par le même (n°.)

R : *cof* AD : : *fin* CAD : *cof* C, donc 1°. *fin* BAD : *fin* CAD : : *cof* B : *cof* C.

2°. Les mêmes triangles donneront encore par le fecond Théorême.

R : *cof* BAD : : *cot* AD : *cot* BA : & R : *cof* CAD : : *cot* AD : *cot* CA. Donc puifque ces deux proportions ont les mêmes antécédents, on aura *cof* BAD : *cof* CAD : : *cot* AB : *cot* AC.

3°. Les

3°. Les mêmes triangles donneront encore par le Théorême V, les deux proportions suivantes. Savoir pour BDA; R : *sin* BD : : *cot* AD : *cot* B; & pour CDA, R : *sin* CD : : *cot* AD : *cot* C.

Donc puisque les antécédents sont égaux, les conséquents seront aussi en proportion, & donneront *sin* BD : *sin* CD : : *cot* B : *cot* C.

Enfin par le Théorême III, on aura dans le triangle BAD, R : *cos* BD : : *cos* AD : *cos* BA.

Et dans le triangle CDA par le même art. . . . . . R : *cos* DC : : *cos* AD : *cos* AC.

D'où il suit aussi que *cos* BD : *cos* CD : : *cos* BA : *cos* AC. *C. Q. F.* 4°, *D.*

SCHOLIE.

160. Les quatre parties de ce Théorême sont au fond la même chose que les Corollaires que nous avons ajoutés à la suite des six Théorêmes sur les triangles rectangles. Seulement nous avons tâché de les rendre plus faciles à retenir, au moyen des définitions que nous avons données avant ce Théorême.

Préparation aux Théorêmes suivants.

PROBLEME.

161. *Etant donné un triangle sphérique quelconque* BAC (fig. 16) *dont on suppose un côté* AB *sur la circonférence d'un grand cercle* ABRFar ; *trouver la projection ortographique* ACB *de ce même triangle sur le plan du même grand cercle ; c'est-à-dire, celle qui est formée par des lignes abaissées de tous les points des côtés du triangle* ABC *perpendiculairement au plan* ABRF*r*.

SOLUTION.

Des extrémités A, B de l'arc AB soient menés au centre G les rayons GA & GB. Par le même centre G

qui eſt auſſi celui de la ſphere, ſoit conçu un plan ou grand cercle *r*DR*o* perpendiculaire au plan AR*ar*, dont la commune ſection R*r* avec le plan de ce même cercle, ſoit perpendiculaire au rayon AG; enfin ſoit prolongé l'arc AC juſqu'à ce qu'il rencontre la circonférence *r*DR*o* dans un point D duquel ſoit encore menée au centre G la ligne DG & la ligne D*d* perpendiculaire au diametre R*r*.

Cela poſé, il eſt évident que l'angle DGR eſt le même que l'angle BAC formé par la rencontre des plans BAG, CAG; puiſque les lignes DG, RG ſont toutes deux perpendiculaires à l'interſection commune AG; & l'angle DG*r* eſt égal au ſupplément du même angle BAC. Il n'eſt pas moins viſible que ſi par le point C, on mene une ligne C*c* perpendiculaire au même plan AR*ar*, le point *c* ſera la projection de l'angle C; & ſi par cette ligne C*c* l'on fait paſſer un plan *l*CL parallele au plan *r*DR*o*, l'interſection L*l* de ce petit cercle avec le grand cercle AR*ar* ſera encore perpendiculaire au rayon AG, & déterminera des arcs AL, A*l* égaux à l'arc AC; & la projection du point C ſe trouvera dans un point de cette ligne. Elle ſe trouvera auſſi par la même raiſon dans une ligne F*f* qui ſeroit l'interſection du grand cercle AR*ar*, & d'un petit cercle *f*CF perpendiculaire au plan de ce même grand cercle, laquelle ligne F*f* ſeroit auſſi perpendiculaire au rayon BG, & donneroit chacun des arcs BF, B*f* égal à l'arc BC. D'où l'on voit ſur le champ comment on peut déterminer la projection de l'angle C par l'interſection commune des lignes L*l*, F*f* ſur le plan du cercle ABR*a*; & par la connoiſſance des trois côtés du triangle BAC. *C. Q. F. T. & D.*

Corollaire I.

162. Les triangles D*d*G, C*c*H rectangles étant ſemblables à cauſe des lignes paralleles dont ils ſont formés, on aura DG : CH ou *r*G : *l*H : : *d*G : *c*H; c'eſt-à-dire,

R : *cos* BAC : : *sin* AC : *c*H. D'ailleurs comme on auroit la même proportion pour tous les points projettés de l'arc AC, il s'ensuit que la projection de ce même arc sur le plan du cercle ABR*r* est une ellipse dont AG est le demi-grand axe, & *d*G le demi-petit axe.

COROLLAIRE II.

163. Il suit encore du dernier Corollaire que la projection ortographique d'un cercle quelconque, ou d'une portion de cercle, est toujours une ellipse ou une portion d'ellipse, dont le demi-grand axe est égal au sinus total, & le demi-petit axe est égal au cosinus de l'angle que forment entr'eux ces deux plans.

SCHOLIE.

164. Nous verrons dans le chapitre suivant une théorie plus détaillée de la projection ortographique, de ses applications à la résolution soit graphique, soit analytique de tous les cas des triangles sphériques : ce que nous avons dit ici doit être considéré comme un lemme absolument nécessaire pour l'intelligence complette du Théorême suivant, qui n'aura plus aucune difficulté, si l'on a bien conçu les plans dont on a parlé dans la construction du dernier Problême.

THÉOREME III.

165. *Dans un triangle sphérique quelconque* BAC, *on aura toujours cette proportion : le produit des sinus des côtés* AB, AC *d'un angle quelconque* BAC, *est au produit des sinus des différences de chacun de ces côtés à la demi-somme des trois côtés; comme le quarré du rayon, est au quarré du sinus de la moitié de l'angle. Ou ce qui revient au même,* $\sin AB \times \sin AC : \sin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right) \times \sin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right) :: R^2 : \sin^2\left(\frac{1}{2}BAC\right)$.

Construction nécessaire à la Démonstration.

Sur le plan du cercle ABRa (*fig.* 17) soient pris de part & d'autre du point A les arcs AL, Al chacun égal à l'arc AC ; & de même de part & d'autre du point B les arcs BF, Bf chacun égal à l'arc BC ; & soient tirées les cordes Ll, Ff respectivement perpendiculaires aux rayons GA & GB. Il est évident, par ce qui a été démontré au problême précédent, que l'intersection C de ces cordes sera la projection de l'angle C du triangle BAC. Il n'est pas moins visible par cette construction que l'on aura BL = AC — AB, & Bl = AC + AB. On aura aussi LF = BF ou BC — AC + AB, & lf = AB + AC — BC & Lf = BC + AC — AB. De plus, soit encore fait cette proportion Hl : CH : : Gr : Gd ; ou ce qui revient au même, soit prise sur Gr une partie Gd quatrieme proportionnelle aux trois lignes Hl, CH & Gr, cette ligne sera le cosinus de l'angle BAC, comme on le voit dans la figure 16. & par conséquent, si par le point d on éleve une droite Dd perpendiculaire au rayon Gr, cette ligne déterminera l'angle RGD égal au même angle BAC, dont elle est le sinus. Enfin du point D aux extrémités du diametre Rr soient tirées les cordes DR, Dr ; du centre G soient abaissées sur ces cordes les perpendiculaires GS, Gs ; & des points S, s soient encore menées les perpendiculaires SV, su au diametre Rr ; il est visible par cette construction que RS est le sinus de la moitié de l'angle BAC, & rs est pareillement le sinus de la moitié du supplément, c'est-à-dire, le cosinus de la moité du même angle. Cela posé, la démonstration n'a plus aucune difficulté.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle rectiligne CLF, les sinus des angles étant entr'eux comme les moitiés des côtés qui leur sont opposés ; & de plus l'angle LCF étant visible-

ment égal à l'angle AGB, son sinus sera celui de l'arc AB, & l'on aura cette proportion : *Sin* C ou *sin* AB : *sin* F : : $\frac{1}{2}$LF : $\frac{1}{2}$CL. Et à cause des lignes proportionnelles GR, HL ; G*d*, CH, on aura HL : GR : : $\frac{1}{2}$ CL : VR $=\frac{1}{2}$ R*d*; & parce que les lignes GR, RS, RV sont en proportion continue, on a GR : VR : : $GR^2 : RS^2$.

Donc en multipliant ces trois proportions par ordre, & effaçant les termes communs aux antécédents & aux conséquents, on aura *sin* AB × HL : *sin* F : : $\frac{1}{2}$ LF × GR^2 : RS^2, ou *sin* AB × HL : *sin* F × $\frac{1}{2}$ LF : : $GR^2 : RS^2$; mais HL $=$ *sin* AC ; *sin* F $=$ *sin* $\frac{1}{2}$ LA*f* $=$ *sin* $\left(\frac{BC+AC-AB}{2}\right) = sin\left(\frac{BC+AC+AB}{2}-AB\right)$, & de même $\frac{1}{2}$ LF $=$ *sin* $\frac{1}{2}$ LRF $=$ *sin* $\left(\frac{BC+AB-AC}{2}\right) = sin \left(\frac{BC+AB+AC}{2}-AC\right)$. Donc en substituant ces valeurs, la derniere proportion deviendra *sin* AB × *sin* AC : $sin\left(\frac{BC+AB+AC}{2}-AB\right) \times sin\left(\frac{BC+AC+AB}{2}-AC\right)$: : $R^2 : sin^2 \frac{1}{2}$BAC. *C. Q. F. D.*

THÉOREME IV.

166. Supposant la même construction qu'au Théorême précédent, je dis que l'on aura encore cette analogie dans un triangle sphérique quelconque BAC.

Le produit des sinus des côtés AB, AC *d'un angle quelconque, est au produit du sinus de la demi-somme des deux côtés & du côté opposé par le sinus de la demi-différence des mêmes côtés au troisieme, comme le quarré du rayon est au quarré du cosinus de la moitié de l'angle compris;* c'est-à-dire, que l'on aura *sin* AB × *sin* AC : $sin\frac{AC+AB+BC}{2} \times sin\frac{AB+AC-BC}{2}$: : $R^2 : cos^2 \frac{1}{2}$ BAC.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle C*lf*, les sinus des angles sont entre eux, comme les moitiés des côtés opposés : or il est

visible que l'angle en f a pour mesure la moitié de l'arc FDl qui est le supplément de la moitié de l'angle FAl, égal à la demi-somme des trois côtés AC, AB, BC. L'arc lf est visiblement égal à AC + AB — BC; ainsi la moitié de sa corde sera le sinus de la moitié de cet arc. Cela posé, on aura, à cause que les sinus sont comme les côtés opposés, $\sin AB : \sin f :: \frac{1}{2} lf : \frac{1}{2} Cl$ & par construction $HL : Gr :: \frac{1}{2} Cl : ur = \frac{1}{2} dr$, & à cause que les lignes Gr, rs, su sont en proportion cont. $Gr : ur :: Gr^2 : rs^2$. Donc en multipliant par ordre, on aura $\sin AB \times Hl : \sin f :: \frac{1}{2} lf \times Gr^2 : rs^2$; ou bien $\sin AB \times Hl : \sin f \times \frac{1}{2} lf :: Gr^2 : rs^2$, & en substituant les valeurs de chaque ligne. $Sin\ AB \times \sin AC : \sin \frac{AB + AC + BC}{2} \times \sin \frac{AB + AC - BC}{2} :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2} BAC$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

167. Donc si l'on nomme s la somme des trois côtés, a le côté opposé à l'angle cherché, b & c les deux côtés qui comprennent l'angle cherché, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{angle} = \frac{r \times \sqrt{\sin(\frac{1}{2}s - b) \times \sin(\frac{1}{2}s - c)}}{\sqrt{\sin b \times \sin c}};$$ & pareillement

$$\cos \tfrac{1}{2} \text{angle} = \frac{r \times \sqrt{\sin\left(\frac{b+c+a}{2}\right) \times \sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sqrt{\sin b \times \sin c}} = \frac{r \times \sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s - a)}}{\sqrt{\sin b \times \sin c}}.$$

COROLLAIRE II.

168. Puisque l'on a (n°.70) $tang\ A = \frac{\sin A \times r}{\cos A}$, il s'ensuit qu'on aura aussi pour la tangente du demi-angle

$$tang\ \tfrac{1}{2} \text{angle} = \frac{r \times \sqrt{\sin(\frac{1}{2}s - b) \times \sin(\frac{1}{2}s - c)}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times (\sin \frac{1}{2}s - a)}},$$

$$\& \cot. \tfrac{1}{2} \text{angle} = \frac{r \times \sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s - a)}}{\sqrt{\sin(\frac{1}{2}s - b) \times \sin(\frac{1}{2}s - c)}}.$$

COROLLAIRE III.

169. Puisque l'on a (n°. 72) $\sin 2A = \frac{\cos A \times 2\sin A}{R}$, il s'ensuit aussi que l'on aura pour le sinus de l'angle entier $\sin A = \frac{2r \times \sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) \times \sin(\frac{1}{2}s-b) \times \sin(\frac{1}{2}s-c)}}{\sin b \times \sin c}$. Cette formule peut aussi se trouver directement par la comparaison des triangles semblables lCf; LCF. La formule $\cos. 2A = \frac{2\cos^2 A - RR}{\cos A}$ donneroit pour le cosinus de l'arc entier $\cos A = \frac{(2\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) - \sin b \times \sin c) \times r}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) \times \sin b \times \sin c}}$, & divisant ces deux expressions l'une par l'autre, on auroit une expression encore plus compliquée pour celle de la tangente de l'arc entier.

COROLLAIRE IV.

170. Si les côtés qui comprennent l'angle cherché sont égaux, on aura $\sin \frac{1}{2}$ angle $= \frac{R \times \sin \frac{1}{2} BC}{\sin AB.}$ & $\cos^2 \frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{\sin(b+\frac{1}{2}a) \times \sin(b-\frac{1}{2}a)}}{\sin. b}$.

SCHOLIE.

171. On voit par toutes les formules que nous venons de déduire des deux derniers Théorêmes, pourquoi l'on s'est arrêté à chercher l'angle d'un triangle dont on connoît les trois côtés par le sinus ou le cosinus de sa moitié; puisque toutes les autres formules seroient beaucoup plus difficiles à construire par les logarithmes. On peut cependant employer avec autant de facilité les formules que nous avons données pour les tangentes ou cotangentes de la moitié de l'angle cherché, puisque ces formules sont à peu près aussi simples que les deux autres. Ainsi l'on aura quatre moyens de résoudre ce cas de Trigonométrie.

Néper, *Ougtred*, *Jones* & plusieurs autres Mathématiciens Anglois, pour conserver davantage l'analogie qui se trouve entre les solutions du cas que nous examinons par le sinus & le cosinus de la moitié de l'angle, ont donné des formules un peu différentes des nôtres, quant à l'expression. Comme elles peuvent servir à les faire retenir, nous ajouterons ici ces mêmes formules. Soient a & c les côtés qui contiennent l'angle cherché dont la somme soit s & la différence d; & soit b le côté opposé à ce même angle cherché, que l'on regardera comme la base.

On aura *sinus* $\frac{1}{2}$ angle $= \dfrac{r \times \sqrt{\text{fin}\,\frac{b+d}{2} \times \text{fin}\,\frac{b-d}{2}}}{\sqrt{\text{fin}\,a \times \text{fin}\,c.}}$

& *cosin.* $\frac{1}{2}$ angle $= \dfrac{r \times \sqrt{\text{fin}\,\frac{b+s}{2} \times \text{fin}\,\frac{b-s}{2}}}{\sqrt{\text{fin}\,a \times \text{fin}\,c.}}$ ce qui donne

tang $\frac{1}{2}$ angle $= \dfrac{r \times \sqrt{\text{fin}\,\frac{b+d}{2} \times \text{fin}\,\frac{b-d}{2}}}{\sqrt{\text{fin}\,\frac{b+s}{2} \times \text{fin}\,\frac{b-s}{2}}}.$

Pour appliquer toutes ces formules à la trigonométrie rectiligne, il n'y a qu'à faire attention que le sinus & la tangente se confondent avec les côtés mêmes du triangle; & l'on aura en gardant toujours les mêmes dénominations pour les trois côtés du triangle, *fin* $\frac{1}{2}$ angle $= \dfrac{r \times \sqrt{(\frac{1}{2}s - b) \times (\frac{1}{2}s - c)}}{\sqrt{bc}}$ & *cos* $\frac{1}{2}$ angle . . . . $= \dfrac{r \times \sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s - a)}}{\sqrt{bc}}$ & *tang.* $\frac{1}{2}$ angle $= \dfrac{r \times \sqrt{(\frac{1}{2}s - b) \times \frac{1}{2}(s - c)}}{\sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s - a)}}.$
D'où l'on voit qu'en ajoutant aux logarithmes des facteurs des numérateurs de chaque fraction les compléments arithmétiques des facteurs de chaque dénominateur, & prenant la moitié de cette somme, on aura l'angle

cherché d'une maniere bien plus ſimple que par les regles ordinaires de la Trigonométrie rectiligne.

On remarquera de plus que la formule trouvée pour le ſinus de A,(n°. 169) nous donne une propriété aſſez remarquable du triangle rectiligne; ſavoir que le ſinus d'un angle quelconque eſt égal au double de la ſurface de ce triangle diviſée par le produit des côtés qui comprennent l'angle cherché. Car on démontre dans tous les éléments de Géométrie que la ſurface d'un triangle $= \sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s - a) \times (\frac{1}{2}s - b) \times (\frac{1}{2}s - c)}$ ce que devient le numérateur de la formule que nous avons trouvé pour *ſin* A, lorſque le triangle eſt rectiligne.

Théoreme V.

172. *Dans un triangle ſphérique quelconque* BAC *dont on connoît les trois angles, on aura toujours cette analogie:*

Le produit des ſinus des angles ſur un côté eſt au produit des coſinus des différences de chacun de ces angles ſur ce côté à la demi-ſomme des trois angles, comme le quarré du rayon, eſt au quarré du coſinus de la moitié du côté cherché, c'eſt-à-dire, $\sin B \times \sin . C : \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right) \times \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2} BC$. Et encore cette autre analogie pour un côté quelconque.

Le produit des ſinus des angles adjacents ſur un côté eſt au produit du coſinus de la demi-ſomme de ces deux angles & du troiſieme, par le coſinus de la demi-différence de ces deux angles au troiſieme; comme le quarré du rayon, eſt au quarré du ſinus de la moitié du côté cherché: c'eſt-à-dire, que l'on aura

$$\sin B \times \sin C : \cos\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times \cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : \sin^2 \frac{1}{2} BC.$$

Démonstration.

Dans le triangle DEF (*fig.* 11.) dont toutes les

parties font suppléments de celles du triangle BAC (n°. 131). On aura par le Théorême IV.

$Sin\, ED \times sin\, EF : sin\left(\frac{DF+FE+DE}{2} - DF\right) \times sin\left(\frac{DF+FE+DE}{2} - FE\right) :: R^2 : sin^2 \frac{1}{2} DFE.$

Mais les arcs FD, FE font les suppléments des angles B & C du triangle BAC, ainfi leurs finus font les mêmes que ceux des mêmes angles B & C. De même puifque le finus du demi-fupplément d'un angle ou d'un arc eft égal au cofinus de cette moitié, on verra, en faifant les fubftitutions convenables au fecond terme, qu'il deviendra. $Cof.\left(\frac{B+C+A}{2} - B\right) \times cof\left(\frac{B+C+A}{2} - C\right)$. Enfin l'angle DFE étant fupplément du côté BC, fa moitié fera le complément de la moitié du même côté par la même raifon, & fon finus deviendra le cofinus du demi-côté BC. Ainfi la proportion précédente fe changera en celle-ci. $Sin\, B \times sin\, C : cof\left(\frac{B+C+A}{2} - B\right) \times cof.\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right) :: R^2 : cof^2 \frac{1}{2} BC.$ *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. Dans le même triangle DEF, on aura par le cinquieme Théorême $sin\, FD \times sin\, FE : sin\left(\frac{DF+FE+DE}{2}\right) \times sin\left(\frac{DF+FE-DE}{2}\right) :: R^2 : cof^2 \frac{1}{2} DEF$, faifant dans cette proportion les fubftitutions femblables à celles que nous avons fait dans la précédente, on la changera en celle-ci.

$Sin\, B \times sin\, C : cof.\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times cof\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : sin^2 \frac{1}{2} BC.$ *C. Q. F.* 2°, *D.*

COROLLAIRE I.

173. Donc fi l'on nomme s la fomme des trois angles d'un triangle ; α, β, γ ces trois angles; en fuppofant que les angles β, γ font adjacents au côté cherché ; on aura

Pour la résolution de tous les
gles sphériques rectangles.

s où les parties sont séparées de la moyenne, ier Théorême général de *Neper*. (n. 148).

rmes cherchés.		*Théorêmes.*	*Cas où les Cherchées sont moindres que 90°.*
ôté don. / hypot.	S	*Th.* 1.	Si les données sont de même espece.
g. côté don. / *ng.* hypot.	A	*Th.* 1.	*Idem.*
n. hypot. / côté don.	S.	*Th.* 1.	Si le côté donné est moindre que 90°.
té don. / g. don.	S.	*Th.* 1.	Douteux.
côté donné. / ang. donné.	A	*Th.* 4.	Douteux.
gle donné / ôté donné	S	*Th.* 1.	Douteux.
côté donné / ngle donné	A.	*Th.* 1.	Si les données sont de même espece.
té don. × *sin.* ang. don.	S.	*Th.* 3.	Si le côté donné est moindre que 90°.
é don. × *tang.* ang. don.	A.	*Th.* 4.	Si l'angle donné est moindre que 90°.
hyp. × *cos.* angle don.	A.	*Th.* 1.	Si l'angle donné est aigu.
p. × *sin.* angle don.	S.	*Th.* 1.	Si les données sont de même espece.
. angle donné / *sin.* hypot.	A.	*Th.* 5.	Si l'hypoténuse est moindre que 90°.
ng. *cos.* côtés donnés	S.	*Th.* 2.	Si les données sont de même espece.
côté opposé / té adjacent.	A.	*Th.* 4.	Si le côté opposé est aigu.
ng. *cotang.* ang. don.	A.	*Th.* 5.	Si les données sont de même espece.
angle opposé / ang. adjacent.	S.	*Th.* 3.	Si l'angle opposé est aigu.

gles sphériques obliquangles.

gment de l'angle ou du côté divisé par la perpendicu-
urs du Terme demandé.

ont entr'eux comme les *sin.* des côtés opposés.

té = *cos.* angle adj. × *tang.* côté donné.
eg. × *tang.* ang. adj. à ce côté donné
g. ang. opp. au même côté donné
= *cosin.* côté don. × *tang.* angle adj.

ang. = $\frac{\textit{sin.}\ \text{I seg.} \times \textit{cos.}\ \text{ang. opp. au côté don.}}{\textit{cos.}\ \text{angle adj. au côté don.}}$

t entr'eux comme ceux des angles opposés.

hé = *tang.* angle don. × *cos.* côté adj.

ang. = $\frac{\textit{cos.}\ \text{I seg.} \times \textit{tang.}\ \text{côté don. adj. à l'an. don.}}{\textit{tang.}\ \text{côté opp. à l'angle don.}}$

é = *cos.* angle don. × *tang.* côté adj. à cet angle.

côté = $\frac{\textit{cos.}\ \text{I seg.} \times \textit{cos.}\ \text{côté opp. à l'angle don.}}{\textit{cos.}\ \text{côté adj. à l'angle don.}}$

iv. = *cos.* ang. don. × *tang.* côté opp. à l'an. cherché.

$\frac{\textit{tang.}\ \text{angle don.} \times \textit{sin.}\ \text{I segment}}{\textit{sin.}\ \text{II segment du côté divisé.}}$

iv. = *cos.* angle don. × *tang.* côté non coupé.

$\frac{\textit{cos.}\ \text{côté non coupé} \times \textit{cos.}\ \text{II segment}}{\textit{cos}\ \text{I segment du côté divisé.}}$

v. = *cos.* côté don. × *tang.* ang. opp. au côté cherché

$\frac{\textit{tang.}\ \text{côté don.} \times \textit{cos.}\ \text{I seg. angle divisé.}}{\textit{cos.}\ \text{II seg. du même angle.}}$

= *cos.* côté don. × *tang.* angle don. non divisé.

$\frac{\textit{cos.}\ \text{angle non divisé} \times \textit{sin.}\ \text{II segment.}}{\textit{sin.}\ \text{I segment de l'angle divisé.}}$

ents à l'angle cherché.

; $\textit{cos}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ang.} = \frac{r \times \sqrt{\textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}s \times \textit{sin.}\ (\tfrac{1}{2}s - a)}}{\sqrt{\textit{sin.}\ b \times \textit{sin.}\ c}}.$

djacents au côté cherché.

$\textit{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{côté} = \frac{r\sqrt{\textit{cos.}\ (\tfrac{1}{2}s - \beta) \times \textit{cos.}\ (\tfrac{1}{2}s - \gamma)}}{\sqrt{\textit{sin.}\ \beta \times \textit{sin.}\ \gamma}}.$

les formules ſuivantes. $Sin \frac{1}{2}$ côté $= \frac{r \times \sqrt{\cos \frac{1}{2} s \times \cos (\frac{1}{2} s - \alpha)}}{\sqrt{\sin \beta \times \sin \gamma}}$.

$\cos \frac{1}{2}$ côté cherché $= \frac{r \times \sqrt{\cos (\frac{1}{2} s - \beta) \times \cos \frac{1}{2} (s - \gamma)}}{\sqrt{\sin \beta \times \sin \gamma}}$ &

$tang \frac{1}{2}$ côté $= \frac{r \times \sqrt{\cos \frac{1}{2} s \times \cos (\frac{1}{2} s - \alpha)}}{\sqrt{\cos (\frac{1}{2} s - \beta) \times \cos (\frac{1}{2} s - \gamma)}}$. On trouveroit aiſément des formules pour les ſinus & coſinus, tangentes ou cotangentes du côté cherché tout entier; mais ces expreſſions étant plus compliquées que celles-ci, il ſeroit inutile de s'y arrêter davantage.

Corollaire II.

174. Dans le cas où les deux angles ſur le côté cherché ſeroient égaux, on auroit par la premiere partie du Théorême $\sin^2 B : \cos^2 \frac{1}{2} A :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2} BC$, & en tirant les racines $\cos \frac{1}{2} BC = \frac{r \times \cos \frac{1}{2} A}{\sin B}$. La ſeconde partie donneroit une formule moins ſimple que la premiere.

Scholie.

175. Ces Théorêmes renferment la ſolution de tous les cas poſſibles des triangles ſphériques obliquangles, comme il ſera aiſé de s'en convaincre à l'inſpection de la ſeconde table, ſur laquelle nous avons réunies toutes ces ſolutions. Pour donner néanmoins à cette partie toute l'étendue dont elle peut être ſuſceptible; nous ajouterons encore la ſection ſuivante, dans laquelle on trouvera pluſieurs Théorêmes généraux très-intéreſſants, & particuliérement les fameuſes analogies de *Néper*, dans leſquelles ce Géometre avoit eu en vue de ramener la Trigonométrie ſphérique aux mêmes analogies que la Trigonométrie rectiligne. En donnant à ces Théorêmes toute la généralité poſſible, il ſera facile d'obſerver que les analogies de la Trigonométrie rectiligne ne ſont que

des cas particuliers de celles-ci; aussi nous aurons soin de les déduire chacune en particulier par de simples Corollaires. Il est étonnant que la plupart des Auteurs Trigonométriques n'aient fait aucune mention de ces analogies : d'autres les ont données sans démonstration, & M. *Volf* en particulier les a défigurées, en leur substituant des proportions qui ne sont pas celles de *Néper*. Ces analogies pourront encore être très-utiles, en ce qu'elles contribueront à retenir aisément les solutions de tous les cas possibles des triangles obliquangles, soit sphériques soit rectilignes.

SECTION QUATRIEME.

Démonstration des Analogies de Néper, *& des autres Analogies moins communes des Triangles sphériques & rectilignes.*

THÉOREME I.

176. Si d'un angle quelconque A d'un triangle sphérique obliquangle BAC, (fig. 15.) on abaisse une perpendiculaire AD sur la base BC prolongée, s'il est nécessaire, on aura toujours cette analogie;

La tangente de la moitié de la base est à la tangente de la demi-somme des côtés, comme la tangente de la demi-différence des mêmes côtés, est à la tangente de la demi-différence ou de la demi-somme des segments de la base formés par la perpendiculaire; suivant qu'elle tombe au dedans ou au dehors du triangle, c'est-à-dire, que l'on aura $tang\ \frac{1}{2} BC : tang\ \frac{AB + AC}{2} :: tang\ \frac{AB - AC}{2} : tang\ \frac{BD \mp DC}{2}$.

DÉMONSTRATION.

L'on a vu (art. 152) que l'on a $cof\,BD : cof\,CD :: cof\,AB : cof\,AC$, donc on aura aussi *addendo & detrahendo*, $cof\,BD + cof\,CD : cof\,BD - cof\,CD :: cof\,AB + cof\,AC : cof\,AB - cof\,AC$. Mais (n°. 101.) $cof\,BD + cof\,CD : cof\,BD - cof\,CD :: cot\left(\frac{BD-CD}{2}\right) : tang\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$, & par la même raison $cof\,AB + cof\,AC : cof\,AB - cof\,AC :: cot\left(\frac{AB-AC}{2}\right) : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$.

Donc puisque les premiers rapports de ces deux proportions sont égaux, les seconds le seront aussi, & donneront cette proportion $cot\left(\frac{BD-CD}{2}\right) : tang\left(\frac{BD+CD}{2}\right) :: cot\left(\frac{AB-AC}{2}\right) : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$. Ce qui donne pour le produit des extrêmes & des moyens, après avoir substitué les tangentes aux cotangentes $\frac{tang\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC\right)}{tang\left(\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}CD\right)} = \frac{tang\left(\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CD\right)}{tang\left(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC\right)}$.

Si la perpendiculaire tombe au dedans du triangle $\frac{BD+CD}{2} = \frac{BC}{2}$ & si elle tombe au dehors $\frac{BD-CD}{2} = \frac{BC}{2}$; substituant ces différentes expressions selon le cas qui doit avoir lieu : la derniere égalité réduite en proportion donnera

$$Tang\,\tfrac{1}{2}BC : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right) :: tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right) : tang\left(\frac{BD\mp DC}{2}\right).$$ *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

177. On voit aisément qu'en supposant le triangle rectiligne ; comme alors les tangentes se confondent avec les côtés, on aura cette proportion :

La base du triangle est à la somme des deux côtés; comme la différence des mêmes côtés est à la différence ou à la somme des segments formés par la perpendiculaire abaissée sur cette base, selon que cette perpendiculaire tombe au dedans ou au dehors du triangle.

On voit de plus que pour les triangles sphériques ou rectilignes, cette formule a lieu dans le cas où l'on connoît les trois côtés, en réduisant d'abord le triangle en deux triangles rectangles dans chacun desquels on connoîtra, outre l'angle droit, l'hypoténuse & un côté. Mais les formules des art. 165 & 166 doivent toujours être préférées dans ces cas, soit pour les triangles sphériques soit pour les triangles rectilignes, parce qu'elles se construisent encore plus aisément.

Théoreme II.

178. Supposant toujours que d'un angle quelconque A d'un triangle sphérique BAC, l'on ait abaissé une perpendiculaire AD, je dis que l'on aura toujours les deux proportions suivantes: (*fig.* 15.)

1°. *Le sinus de la somme des angles sur un côté est au sinus de leur différence, comme la tangente ou cotangente du demi-côté adjacent à ces angles est à la tangente de la demi-différence, ou à la cotangente de la demi-somme des segments formés par cette perpendiculaire*; c'est-à-dire, que l'on aura cette analogie.

Sin (B + C) : *sin* (B — C) : : *tang* ou *cot* $\frac{1}{2}$ BC : *tang* ou *cotang* $\left(\frac{BD \mp CD}{2}\right)$.

2°. *Le sinus de la somme des côtés est au sinus de leur différence, comme la cotangente du demi-angle compris entre ces côtés est à la tangente de la demi-somme, ou de la demi-différence des segments de cet angle*; c'est-à-dire, que l'on aura *sin* (AB + AC) : *sin* (AB — AC) : : *cotang* $\frac{1}{2}$ BAC : *tang* ($\frac{1}{2}$ BAD $\mp$ $\frac{1}{2}$ CAD).

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle BAC l'on a (n°. 159. art. 3°.) *tang* B : *tang* C : : *ſin* CD : *ſin* BD ; donc on aura *addendo & detrahendo*, *tang* B + *tang* C : *tang* B — *tang* C : : *ſin* CD + *ſin* BD : *ſin* CD — *ſin* BD ; mais le premier rapport eſt égal à celui de *ſin* (B + C) à *ſin* (B — C) (n°. 88), & le ſecond rapport eſt égal à celui de *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$ à *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$ (n°. 96). Donc en ſubſtituant ces rapports aux précédents, & mettant *tang* $\frac{1}{2}$ BC à la place de *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$, lorſque la perpendiculaire tombe au dedans, & *tang* $\frac{1}{2}$ BC à la place de *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$, lorſqu'elle tombe au dehors ; l'on aura pour les deux cas. *Sin* (B + C) : *ſin* (B — C) : : *tang* ($\frac{1}{2}$BC) : *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$: : *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$: *tang* ($\frac{1}{2}$BC) : : *cot* $\frac{1}{2}$ BC : *cot* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$ *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Dans le même triangle on aura encore par le ſecond article du même n°. 159) *tang* AB : *tang* AC : : *coſ* CAD : *coſ* BAD ; donc *addendo & detrahendo* *tang* AB + *tang* AC : *tang* AB — *tang* AC : : *coſ* CAD + *coſ* BAD : *coſ* CAD — *coſ* BAD, mais (art. 96) le premier rapport eſt égal à celui de *ſin* (AB + AC) à *ſin* (AB — AC) & (n°. 101.) le ſecond eſt égal à celui de *cot* $\left(\frac{BAD-CAD}{2}\right)$ à *tang* $\left(\frac{BAD+CAD}{2}\right)$. Donc en ſubſtituant ces rapports aux précédents, & mettant $\frac{1}{2}$ BAC à la place de $\frac{BAD+CAD}{2}$, lorſque la perpendiculaire tombe au dedans du triangle, & $\frac{1}{2}$ BAC à la place de $\frac{BAD-CAD}{2}$; lorſqu'elle tombe au dehors, on aura pour les deux cas :

Sin (AB + AC) : *ſin* (AB − AC) : : *cot* $\frac{1}{2}$ BAC : *tang* ($\frac{1}{2}$ BAD ∓ $\frac{1}{2}$ CAD). *C. Q. F.* 2°. *D.*

Scholie.

179. On voit aiſément que la premiere partie du Théorême ſert à réſoudre un triangle ſphérique, dans lequel on connoît un côté & les deux angles adjacents; en le réduiſant d'abord à deux triangles rectangles dans chacun deſquels on connoîtra un côté & l'angle adjacent.

Cette premiere partie ſerviroit au même uſage dans un triangle rectiligne; mais elle devient inutile pour la réſolution des côtés du triangle qui ſe trouvent plus aiſément par l'analogie connue entre les ſinus des angles & les côtés oppoſés. Le ſeul cas où ce Théorême peut être d'uſage dans la Trigonométrie rectiligne, ſeroit celui où l'on voudroit trouver les ſegments de la baſe. En ſuppoſant que cette baſe eſt connue & les deux angles adjacents; alors pour avoir les ſegments de la baſe, on feroit cette analogie. *Le ſinus de la ſomme des angles ſur cette baſe eſt au ſinus de leur différence, comme la moitié de la baſe eſt à la demi-différence ou à la demi-ſomme des ſegments de cette baſe*, ſelon que la perpendiculaire tombe au dedans ou au dehors.

La ſeconde partie du même Théorême a lieu dans le cas où l'on connoît deux côtés & l'angle compris; & ſert encore à réſoudre le triangle en deux triangles rectangles, dans chacun deſquels on connoîtra l'hypoténuſe & l'angle adjacent. Ce même cas peut auſſi s'appliquer au cas ſemblable des triangles rectilignes, & fait trouver les ſegments de l'angle vertical, en ſubſtituant AB + AC & AB — AC au ſinus de ces mêmes quantités. La regle ordinaire n'eſt gueres plus ſimple que celle-ci.

Théoreme III.

180. Je dis de plus que l'on aura toujours les deux proportions ſuivantes dans un triangle ſphérique quelconque BAC.

1°. Le

1°. *Le sinus de la demi-somme des côtés est au sinus de leur demi-différence, comme la tangente du demi-côté adjacent à ces angles est à la tangente de la demi-différence des côtés opposés*, ou, ce qui revient au même, $sin\left(\frac{C+B}{2}\right) : sin\left(\frac{C-B}{2}\right) :: tang\, \frac{1}{2} BC : tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$.

2°. *Le cosinus de la demi-somme des angles sur un côté est au cosinus de la demi-différence des mêmes angles, comme la tangente du demi-côté adjacent est à la tangente de la demi-somme des côtés* ou bien $cos\left(\frac{C+B}{2}\right) : cos\left(\frac{C-B}{2}\right) :: tang\, \frac{1}{2} BC : tang\left(\frac{AC+AB}{2}\right)$.

DÉMONSTRATION.

Nous avons vu au Théorême second que $sin\,(C+B) : sin\,(C-B) :: tang\, \frac{1}{2} BC : tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. Mais $C+B = 2\left(\frac{C+B}{2}\right)$ & $C-B = 2\left(\frac{C-B}{2}\right)$. D'ailleurs par la formule $sin\, 2A = sin A \times 2 cos A$ (n°.72) on aura $sin\,(C+B) = 2 sin\left(\frac{C+B}{2}\right) \times cos\left(\frac{C+B}{2}\right)$, & de même pour *sin* de $C-B$, ce qui changera notre premiere proportion dans la suivante, après avoir divisé le premier rapport par 2; $sin\left(\frac{C+B}{2}\right) \times cos\left(\frac{C+B}{2}\right) : sin\left(\frac{C-B}{2}\right) \times cos\left(\frac{C-B}{2}\right) :: tang\, \frac{1}{2} BC : tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. De plus à cause que dans un triangle sphérique quelconque les sinus des angles sont entr'eux comme les sinus des côtés opposés, on aura $sin\, C : sin\, B :: sin\, AB : sin\, AC$; donc *addendo* & *detrahendo* $sin\, C + sin\, B : sin\, C - sin\, B :: sin\, AB + sin AC : sin\, AB - sin\, AC$. Présentement si l'on substitue à ces rapports leurs égaux indiqués aux art. 92, 93 & 96, la proportion deviendra celle-ci.

$Sin\left(\frac{C+B}{2}\right) \times cof\left(\frac{C-B}{2}\right) : cof\left(\frac{C+B}{2}\right) \times fin\left(\frac{C-B}{2}\right)$ $: : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$.

Multipliant cette proportion par celle que nous avons trouvée plus haut, on trouvera après avoir effacé ce qui se détruit.

$Sin^2\left(\frac{C+B}{2}\right) : fin^2\left(\frac{C-B}{2}\right) : : tang\ \frac{1}{2}\ BC \times tang$ $\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right) \times tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$. Enfin si l'on multiplie les antécédents de la portion alterne du premier Théorême par $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$ & les conséquents par $tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$, on trouvera cette derniere proportion $tang\ \frac{1}{2}\ BC \times tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : tang \times \left(\frac{BD-CD}{2}\right)$ $\times tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right) : : tang^2\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : : tang^2\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. Donc puisque cette proportion & l'avant derniere ont un même rapport; en concluant du premier au dernier, on trouvera cette analogie.

$Sin^2\left(\frac{C+B}{2}\right) : fin^2\left(\frac{C-B}{2}\right) : : tang^2\left(\frac{AB+AC}{2}\right) :$ $tang^2\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$; & tirant les racines $fin\left(\frac{C+B}{2}\right) : fin$ $\left(\frac{C-B}{2}\right) : : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : tang\left(\frac{BD-AD}{2}\right) : : tang\ \frac{1}{2}$ $BC : tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$, par le même Théorême premier, d'où suit évidemment la vérité de la premiere partie du Théorême.

On prouveroit par un calcul semblable que cof $\left(\frac{C+B}{2}\right) : cof\left(\frac{C-B}{2}\right) : : tang\ \frac{1}{2}\ BC : tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$; toute l'adresse du calcul se réduiroit à disposer les deux

proportions que nous avons multipliéés l'une par l'autre, de maniere qu'on eût les quarrés des cosinus des quantités C + B & C — B. Ce qui ne souffre aucune difficulté, d'où suit la vérité du fameux Théorême de *Néper* dans l'un & l'autre cas. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

181. Il est aisé de voir que ce Théorême sert à trouver en même temps les deux côtés d'un triangle sphérique quelconque, dans lequel on connoît les deux angles sur la base aussi connue. Il serviroit pareillement à résoudre le même cas de la Trigonométrie rectiligne, en substituant la base & la somme, ou la différence des côtés, à la place des tangentes de ces quantités. On remarquera de plus que notre démonstration amene encore deux Théorêmes qui méritent quelque attention.

Le premier peut s'énoncer ainsi.

Dans un triangle sphérique quelconque, le sinus de la demi-somme des angles est au sinus de leur demi-différence; comme la tangente de la demi-somme des côtés opposés est à la tangente de la demi-différence des segments de la base.

Et le second par cette autre analogie.

Le cosinus de la demi-somme des angles sur la base est au cosinus de la demi-différence des mêmes angles, comme la tangente de la demi-différence des côtés opposés est à la tangente de la demi-différence des mêmes segments de la base.

Il suit encore du Théorême, & de ce que dans un triangle rectiligne la somme des trois angles est égale à deux droits, que l'on aura ces deux analogies générales.

1°. *Le sinus du demi-angle vertical est au cosinus de la demi-somme ou de la demi-différence des angles; comme la base ou le côté opposé à cet angle est à la difference ou à la somme des deux autres côtés;* c'est-à-dire que $\sin \frac{1}{2} A : \cos\left(\frac{C \pm B}{2}\right) :: BC : AB \mp AC$.

2°. *Le cosinus du demi-angle vertical est au sinus de la demi-somme, ou de la demi-différence des angles opposés; comme la base est à la somme, ou à la différence des côtés opposés :* c'est-à-dire que $cos \frac{1}{2} A : sin \left(\frac{C - B}{2}\right) :: BC : AB \pm AC$.

Enfin les deux analogies que nous a donné la démonstration de ce Théorême, donneront cette double analogie pour un triangle rectiligne quelconque, dans lequel on considere les segments de la base.

La somme ou la différence des côtés est à la différence des segments de la base, comme le cosinus ou le sinus du demi-angle vertical est au sinus ou au cosinus de la demi-différence des angles sur cette base ; c'est-à-dire que l'on aura

$$AB \pm AC : BD - CD :: cos \text{ ou } sin \tfrac{1}{2} A : sin \text{ ou } cos \left(\frac{C - B}{2}\right).$$

THÉOREME IV.

182. Dans tout triangle sphérique BAC, on aura toujours ces deux analogies.

1°. *Le sinus de la demi-somme des côtés qui comprennent un angle, est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris entre les côtés est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles ou*

$$Sin \left(\frac{AB + AC}{2}\right) : sin \left(\frac{AB - AC}{2}\right) :: cot \tfrac{1}{2} BAC : tang \left(\frac{C - B}{2}\right).$$

2°. *Le cosinus de la demi-somme des côtés est au cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris entre les côtés est à la tangente de la demi-somme des angles opposés ;* c'est-à-dire que

$$cos \left(\frac{AB + AC}{2}\right) : cos \left(\frac{AB - AC}{2}\right) :: cot \tfrac{1}{2} BAC : tang \left(\frac{C + B}{2}\right).$$

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle DEF dont toutes les parties ſont ſupplément de celles du triangle BAC, on aura par le Théorême précédent $ſin\left(\frac{E+D}{2}\right)$: $ſin\left(\frac{E-D}{2}\right)$: : $tang\ \frac{1}{2}$ DE : $tang\left(\frac{FD-FE}{2}\right)$. Pour découvrir ce que cette analogie devient au triangle BAC; ſoient a & b deux arcs de cercle qui repréſenteront, ſi l'on veut, les angles E & D; & ſoit $2r = 180°$. Les ſuppléments de ces angles a & b ſeront $2r - a$ & $2r - b$; & la demi-ſomme de ces ſuppléments ſera $2r - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, c'eſt-à-dire, le ſupplément de la demi-ſomme de ces angles a & b. Donc $ſin\left(\frac{E+D}{2}\right) = ſin\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$. On fera voir de même que $ſin\left(\frac{E-D}{2}\right) = ſin\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$; enfin parce que $tang\ \frac{1}{2}$ ſupplément $=$ $tang$ complément de la moitié, on aura $tang\ \frac{1}{2}$ DE $= cot\ \frac{1}{2}$ BAC, & $tang\ \frac{FD-FE}{2} = tang\left(\frac{C-B}{2}\right)$. *C. Q. F.* 1°. *D.*

L'on démontreroit précifément de la même maniere que la proportion $coſ\left(\frac{E+D}{2}\right)$: $coſ\left(\frac{E-D}{2}\right)$: : $tang\ \frac{1}{2}$ DE : $tang\left(\frac{DF+FE}{2}\right)$ ſe changeroit pareillement en celle-ci $coſ\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: $coſ\ \frac{AB-AC}{2}$: : $cot\ \frac{1}{2}$ BAC : $tang\left(\frac{C+B}{2}\right)$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

SCHOLIE.

183. On voit à la ſeule inſpection de ces deux analogies qu'elles ſervent à trouver en même temps les deux angles d'un triangle ſphérique quelconque, dans lequel on connoît les deux côtés & l'angle compris. On

voit de plus que la premiere analogie appliquée aux triangles rectilignes dans le cas semblable, donne l'analogie ordinaire.

La somme des côtés est à leur différence, comme la tangente du demi-angle compris entre ces côtés est à la tangente de la demi-différence des angles opposés. Enfin l'on voit aussi que la seconde analogie n'a pas lieu dans les triangles rectilignes, parce que *cot* $\frac{1}{2}$ BAC devient égale à *tang* $\left(\frac{C+B}{2}\right)$, à cause que dans ces triangles la somme des trois angles vaut nécessairement deux angles droits; ce qui ne peut avoir lieu pour les triangles sphériques. On pourroit encore ajouter ici des Théorêmes semblables à ceux qui sont énoncés dans les analogies du dernier Scholie; je laisse aux Commençants le plaisir de les trouver eux-mêmes.



le tous les cas possibles des Triangles iquangles.

démontrées *page* 76 *& suiv.*

Valeurs du Terme demandé.

$$s = \frac{\textit{cot.}\ \frac{1}{2}\ \text{angle donné} \times \textit{sin.}\ \frac{1}{2}\ \text{differ. des côtés donnés}}{\textit{sin.}\ \text{demi-somme des mêmes côtés}}.$$

$$es = \frac{\textit{cot.}\ \frac{1}{2}\ \text{angle} \times \textit{cos.}\ \text{demi-différence des côtés}}{\textit{cos.}\ \text{demi-somme des côtés}}.$$

es *sinus* des côtés : : les *sinus* des angles opposés.

nalogie commune ;

inus des angles opposés.

$$\frac{\textit{ang.}\ \text{demi-differ. des angles} \times \textit{sin.}\ \text{demi-som. côtés donnés}}{\textit{sin.}\ \text{demi-différence des côtés donnés}}.$$

gles opp. aux côtés donn. × *cos.* demi-som. des côtés donn.

. demi-différence des mêmes côtés donnés.

$$= \frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{côté donné} \times \textit{sin.}\ \frac{1}{2}\ \text{differ. des angles donnés}}{\textit{sin.}\ \frac{1}{2}\ \text{somme des angles donnés}}.$$

$$= \frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{côté donné} \times \textit{cos.}\ \frac{1}{2}\ \text{differ. des angles donnés}}{\textit{cos.}\ \frac{1}{2}\ \text{somme des angles donnés}}.$$

les *sinus* des angles : : les *sinus* des côtés opposés.

analogie commune;

côtés opposés.

$$\frac{\text{som. angles op. aux côtés don.} \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{diff. côtés donnés}}{\textit{sin.}\ \frac{1}{2}\ \text{differ. ang. opp. aux côtés donnés}}.$$

$$\frac{\text{s opposés aux côtés donnés} \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{somme des côtés}}{\text{ffer. des angles opposés aux côtés donnés}}.$$

laire sur le côté adjacent à l'angle cherché.

$$\left.\begin{matrix}\text{i-}\\ \text{se.}\end{matrix}\right\} = \frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{somme} \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{differ. côtés}}{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{base}}.$$

seg. adj. × *cotang.* côté adjacent.

ın angle quelconque du triangle, dont toutes les parties

lles du Triangle dont les trois angles sont donnés.

CHAPITRE TROISIEME.

De la Résolution Graphique ou Géométrique des Triangles sphériques quelconques.

Observation sur la nature de ces Solutions.

184. Les Géometres font ordinairement peu de cas des Solutions Graphiques ou Géométriques, surtout depuis l'invention des Logarithmes; attendu la simplicité dont les solutions numériques sont devenues susceptibles par ce moyen, & qu'on obtient d'ailleurs une précision beaucoup plus grande; parce que dans les constructions dont nous parlons, cette précision dépend à la fois de l'adresse de celui qui construit, & de la bonté des instruments avec lesquels il opere. J'aurois donc supprimé cette partie sans les considérations suivantes.

1°. Les solutions Géométriques quoique peu exactes pour les raisons qu'on vient d'exposer, n'en sont pas moins rigoureuses aux yeux de l'esprit, étant appuyées sur les vérités les plus connues de la Géometrie. 2°. Il est des cas où l'on n'a pas besoin de toute la précision du calcul; comme lorsqu'il s'agit d'orienter un plan ou une allée par quelques observations faites à la hâte, ce qui peut avoir lieu assez souvent dans la Gnomonique, pour se guider à une opération plus parfaite; ces opérations étant d'ailleurs très-commodes par la facilité de les pratiquer. 3°. Il y a dans l'Astronomie des Théories fondées sur ces solutions: on peut les employer avec succès dans certaines pratiques du pilotage. Enfin elles peuvent

guider dans un calcul où l'on craindroit de se tromper; & si l on y applique l'analyse algébrique, on découvre un très-grand nombre de nouvelles solutions qui éclairent cette partie, & conduisent à des solutions très-élégantes d'Astronomie pratique, lesquelles seroient devenues très-compliquées par d'autres méthodes; comme nous tâcherons de le prouver par des applications à différents Problêmes. Ces formules comparées avec les solutions synthétiques font voir des différences remarquables entre la synthese & l'analyse; elles servent à exercer les Commençants sur cette partie, en leur donnant le moyen de trouver des solutions déduites des considérations Géométriques. J'ajouterai encore que ces formules se trouvent démontrées d'une maniere bien plus simple & bien plus élégante, lorsque les calculs sont appuyés sur une construction Géométrique que par des substitutions purement algébriques; ce que l'on reconnoîtra aisément, si l'on compare mes solutions avec celles que M. de la Caille a donné des mêmes formules.

PROBLEME I.

185. *Connoissant les deux côtés* AB, AC (*fig.* 17.) *d'un triangle sphérique* BAC *&* *l'angle* A *qu'ils comprennent; trouver* 1°, *un des angles sur la base*; 2°, *cette base ou le troisieme côté* BC.

SOLUTION.

Sur le plan du cercle ABRD*r*(fig. 17) soit pris l'arc AB égal à l'un des côtés donnés de l'angle BAC; & soient tirés au centre G les rayons AG & BG, par lequel soit encore mené le diametre *r*GR perpendiculaire au rayon AG; soient aussi pris de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & soit tirée par les extrémités de ces arcs la corde L*l*. Soit de plus fait au centre G l'angle DGR égal à l'angle donné BAC; enfin ayant abaissé du point D la perpendiculaire D*d* au

diametre R*r*, si l'on prend CH quatrieme proportionnelle aux lignes *r*G, *d*G, *l*H, le point C sera, comme on l'a vu (n°. 161) la projection de l'angle C. Cela posé, pour avoir l'un des angles, B par exemple; du point trouvé C on menera au rayon GB la perpendiculaire *f*CXF; ensuite ayant mené le diametre MG*m* perpendiculaire au rayon GB, l'on fera X*f* : XC : : GM : G*n*; par le point *n* ainsi déterminé, l'on menera la ligne *n*N perpendiculaire à GM & terminée à la circonférence en N, l'arc MN sera la mesure de l'angle B. L'angle C se trouveroit, par une opération absolument semblable, en prenant AC sur le plan du cercle ABR*a* au lieu de l'arc AB. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Pour avoir le troisieme côté BC, il est visible qu'il est égal à l'un des arcs BF ou B*f*; puisque les arcs B*f*, BC, BF sont tous d'un même nombre de degrés étant tous compris entre le même point B & un petit cercle perpendiculaire au rayon GB. *C. Q. F.* 2°. *T.*

PREMIER SCHOLIE.

186. La démonstration de cette construction est une suite évidente de la nature de la projection dont on se sert ici, & que nous avons déja expliqué au n°. 161. *S*i l'on ne veut pas recommencer l'opération pour trouver l'angle C, on pourra le découvrir aisément de la maniere suivante que nous ne ferons qu'indiquer, pour ne point trop multiplier les figures. Par les extrémités L, F des arcs AL, BF respectivement égaux aux côtés AC & BC, l'on menera les tangentes de ces arcs terminées aux rayons AG & BG prolongés autant qu'il sera nécessaire. De ces points comme centre avec les mêmes tangentes comme rayons, l'on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en un point duquel on tirera à ces mêmes centres les rayons qui feront entr'eux un angle égal à l'angle C. Cette construction est une suite évidente de ce que l'angle de deux plans est le même que celui qui

eſt formé par deux lignes perpendiculaires à l'interſection commune, comme le ſont ici les tangentes des arcs AC & BC.

SECOND SCHOLIE.

187. Ayant pris comme ci-devant les arcs AL, A*l* chacun égal au côté AC, on peut encore trouver la projection de l'angle C de la maniere ſuivante, ſans employer les proportionnelles. Pour cela du point H comme centre avec le rayon HL, on décrira un demi-cercle L*cl*; au même point H avec le rayon HL, on fera un angle LH*c* égal à l'angle donné BAC; & du point *c* où le rayon H*c* coupe la circonférence, on abaiſſera la perpendiculaire *c*C au diametre *l*L, & le point C ſera la projection cherchée de l'angle C du triangle BAC. Si l'angle en A eſt obtus, le point C tombera ſur H*l*; s'il eſt aigu, le même point tombera ſur HL : on peut auſſi trouver l'angle B avec la même facilité en prenant C*x* = CX ſur la ligne *l*H prolongée s'il eſt néceſſaire; & tirant du point *c* au point *x* la ligne *cx* qui donnera l'angle *cx*L ou *cxl* égal à l'angle ABC.

Pour concevoir la raiſon de cette conſtruction, il ſuffira de jetter les yeux ſur la figure 16, dans laquelle on voit que l'angle CHL eſt égal à l'angle BAC, puiſque les lignes CH & HL ſont toutes deux perpendiculaires à l'interſection commune AG des plans GAB, GAC; ainſi l'angle *c*HL eſt le même que l'angle CHL. De même on voit auſſi que dans le triangle CX*c* rectangle en *c*, les lignes *c*X & CX étant toutes deux perpendiculaires à l'interſection GB des plans BGC, BGA, l'angle qu'elles forment entr'elles, eſt le même que l'angle ABC. Or par notre conſtruction le triangle rectangle *c*C*x* de la figure 17 eſt parfaitement égal au triangle C*c*X de la figure 16; donc l'angle *x* eſt auſſi égal de part & d'autre.

TROISIEME SCHOLIE.

188. En considérant la figure 17 avec attention, on remarquera qu'un triangle quelconque ABC en détermine trois autres que l'on peut regarder comme ses correspondants; savoir *ba*C, B*a*C, *b*AC; chacun desquels a toujours un angle commun ou égal à l'un des angles du triangle BAC, & deux angles suppléments des deux autres du même triangle; ainsi que deux côtés suppléments de ceux de même dénomination avec un côté égal, savoir celui qui est opposé à l'angle égal.

Ces triangles renferment toutes les variétés dont le problême peut être susceptible à l'égard des données; & pour mieux entendre la construction de chaque cas particulier, on peut s'exercer à appliquer chaque solution à chacun de ces triangles.

PROBLEME II.

189. *Connoissant dans un triangle sphérique quelconque* BAC *deux angles* A & B *avec le côté adjacent* AB, *trouver* 1°, *les deux autres côtés;* 2°, *le troisieme angle.*

SOLUTION.

Ayant pris sur le cercle ARD*r* (*fig.* 17) l'arc AB égal au côtédonné, & tiré au centre G les rayons AG & BG; on élevera les lignes G*r*, GM respectivement perpendiculaires à ces mêmes rayons: on prendra ensuite les arcs MN, RD respectivement égaux aux angles en B & en A; puis après avoir tiré les sinus N*n*, D*d*; avec les demi-axes GB, G*n*; GA, G*d*, on tracera les demi-ellipses B*nb*, A*da*, lesquelles se couperont dans un point C qui sera la projection de l'angle C du triangle sphérique BAC. Par ce point C on menera les cordes *l*CL, *f*CF perpendiculaires aux rayons GA & GB, ce qui donnera les arcs AL, A*l* égaux au côté AC, & les arcs BF, B*f* égaux au côté BC. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Connoiſſant les côtés AC & BC, on déterminera l'angle C par l'une ou l'autre des ſolutions indiquées au problême précédent. *C. Q. F. 2°. T.*

PROBLEME III.

190. *Connoiſſant deux côtés quelconques* AB, AC *d'un triangle* BAC *& l'un des angles oppoſés à ces côtés, trouver 1°, le troiſieme côté; 2°, les deux autres angles.*

PREMIERE SOLUTION.

Suppoſons que les côtés connus ſont AB, AC avec l'angle B; & de plus que l'on ſait de quelle eſpece eſt l'angle A compris entre ces côtés connus. On prendra d'abord ſur le plan du cercle ARB*r* un arc AB égal au côté donné AB, & l'on tirera les rayons GA & GB. Par G l'on menera la perpendiculaire MG*m*, au rayon GB ſur laquelle on prendra G*n* égale au coſinus de l'angle B, vers M ſi l'angle BAC eſt obtus, ou G*v* égale au même coſinus vers *m* ſi l'angle BAC eſt aigu; & ſur les axes B*b*, *nv* on tracera l'ellipſe B*nbv*. Enſuite on prendra ſur la circonférence du cercle AB*ar* de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & l'on tirera la corde L*l* qui coupera l'ellipſe B*nbv* en deux points C, C′ qui ſerviront à déterminer le troiſieme côté BC, en menant par ces mêmes points les lignes *f*CX, *φ*C′*x*′ perpendiculaires au rayon GB, leſquelles donneront les arcs B*f* & B*φ* égaux au troiſieme côté, ſelon que l'angle A oppoſé ſera obtus ou aigu. *C. Q. F. 1°. T.*

2°. Pour avoir l'angle A, ayant décrit le demi-cercle *l*KL ſur la corde L*l* comme diametre, & tirées les ordonnées C*c*, C′*c*′ on menera du point H les lignes H*c*, H*c*′ leſquelles donneront les angles LH*c*, LH*c*′ égaux à l'angle A ſelon qu'il doit être obtus ou aigu. L'angle C ſe trouvera par la conſtruction indiquée au n°. 186. *C. Q. F. 2°. T.*

SECONDE SOLUTION.

Si l'on ſuppoſe que les côtés connus ſont AC & BC avec l'angle B oppoſé au côté AC, l'on pourra trouver encore une autre ſolution qui ne ſera pas plus compliquée que la précédente. On prendra d'abord un point B quelconque ſur la circonférence du cercle ABR*a*, lequel ſera le ſommet de l'angle B. On tirera par ce point & le centre G le diametre BG*b*, auquel on menera le diametre MG*m* qui lui ſoit perpendiculaire; ſur lequel on prendra *n*G égal au coſinus de l'angle donné B; puis ayant pris de part & d'autre du point B les arcs BF, B*f* égaux au côté donné BC, & tiré la corde F*f*, on fera cette proportion MG : *n*G : : *f*X : XC, ce qui déterminera le point C ſur le plan du cercle AR*ar*, lequel eſt viſiblement la projection de l'angle C.

Par le centre G & le point C l'on menera le rayon GCP; & ſur la ligne GC, comme diametre, on décrira un cercle : enfin du centre G avec un rayon GH égal au coſinus du côté donné AC, l'on décrira une portion de cercle qui coupera le dernier en deux points H, *h*, par leſquels on menera les lignes GHA, G*h*α qui détermineront le troiſieme côté demandé AB, ou αB ſelon que l'angle inconnu oppoſé au côté connu BC doit être obtus ou aigu. On pourroit auſſi trouver le point C par une conſtruction abſolument la même que celle qui a été expliquée au n°. 187; en décrivant un demi-cercle ſur la corde *f*F, & tirant au point X un rayon qui fit avec *f*X un angle égal à l'angle B, par l'extrémité duquel on abaiſſeroit une perpendiculaire à la même corde *f*X, laquelle détermineroit le point C ſans y employer de proportionnelles. Les angles en A & en C ſe détermineroient comme au premier Problême. *C. Q. F. T.*

PROBLEME IV.

191. *Connoiſſant deux angles quelconques* A *&* B

d'un triangle BAC *avec le côté* AC *opposé à l'un de ces angles, trouver* 1°, *le côté opposé à l'autre angle;* 2°, *le troisieme côté;* 3°, *le troisieme angle.* (*fig.* 17)

SOLUTION.

D'un point A quelconque du cercle ABR*a* soit mené le diametre AG*a* auquel on tirera le diametre *r*GR qui lui soit perpendiculaire. De part & d'autre du même point A soient pris les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & soit tirée la corde L*l*. Sur cette corde, comme diametre, soit décrit le demi-cercle *l*KL; & du point H soient menés les rayons H*c*, H*c'* qui fassent avec LH un angle égal à l'un des angles donnés A, selon que ce même angle est obtus ou aigu. Des points *c*, *c'* soient abaissées les perpendiculaires *c*C, *c'*C', lesquelles détermineront les points *c*, *c'* qui sont les projections de l'angle C ou C'. Ensuite des points *c*, *c'* soient menées les lignes *cx*, *c'x'* qui fassent avec les ordonnées C*c*, C'*c'* les angles C*cx*, C'*c'x'* égaux au complément de l'angle donné B. On a vu (au n°. 187) que la ligne C*x* est égale à CX dont la position détermine le côté AB & le côté BC. Pour la trouver, soit encore tirée la ligne GCP, & sur CG soit décrit un cercle GHC*h*, enfin du point C comme centre, soit décrit avec un rayon = C*x* une portion de cercle qui coupera ce dernier en deux points X qui détermineroit le côté AB en menant le rayon GXB, & la corde *f*CXF menée par le point X, & le point C donnera les arcs B*f*, BF chacun égal au troisieme côté; le troisieme angle se trouveroit toujours par la construction indiquée au n°. 186. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

192. Si l'angle A est aigu, ainsi que l'angle B, le point X trouvé dans le quart de cercle AG*r* donnera le côté AB qui servira pareillement à trouver le côté BC. Il n'est pas moins visible que si l'on imagine un cercle

décrit ſur le rayon C′G, dans lequel ſoit inſcrit la ligne C′x′, on aura encore deux ſolutions du même problême, ſelon que l'angle A du triangle BAC ſera aigu, & l'angle B obtus, ou que les angles en A & B ſeront aigus, & l'angle en C obtus. Nous n'avons point tiré toutes ces lignes ſur la figure dans la crainte de la rendre trop confuſe.

PROBLEME V.

193. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle ſphérique quelconque* BAC, *trouver un angle quelconque du même triangle.*

PREMIERE SOLUTION.

Ayant pris ſur le plan du cercle AR*a* l'arc AB égal à l'un des côtés donnés, & tiré des extrémités A, B de cet arc les rayons AG, BG; on prendra de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* égaux au côté AC & les arcs B*f*, BF égaux au troiſieme côté BC, puis on tirera les cordes L*l*, F*f* qui ſe couperont dans un point C, lequel ſera la projection de l'angle C. Enfin ayant élevé aux rayons GA & GB par le centre G les perpendiculaires *r*GR, *m*GM, on cherchera une quatrieme proportionnelle G*n*, aux lignes *f*X, CX, MG; & par le point *n* qu'elle déterminera ſur MG, l'on menera la perpendiculaire *n*N terminée à la circonférence en N, ce qui donnera l'arc MN égal à la meſure de l'angle B; pareillement on cherchera une droite G*d* quatrieme proportionnelle aux lignes *l*H, CH, *r*G, laquelle déterminera ſur *r*G un point *d*, par lequel on élevera auſſi la perpendiculaire *d*D qui donnera l'arc RD égal à l'angle en A; l'angle C ſe trouveroit par une conſtruction ſemblable, en prenant le côté AC ſur la circonférence au lieu du côté AB. *C. Q. F. T.*

SECONDE SOLUTION.

Si l'on ne veut pas ſe ſervir de proportionnelles, ayant trouvé comme ci-devant le point C par l'interſection des

droites lL, Ff; sur Ll comme diametre, on décrira le demi-cercle LKl; & par le point C l'on menera la perpendiculaire Cc au diametre Ll; & du point c au point H, l'on tirera cH qui donnera l'angle cHL égal à l'angle en A; ensuite ayant pris $Cx = CX$ & tiré la ligne cx, l'angle cxC sera égal à l'angle B; on trouveroit l'angle C par une construction semblable. *C. Q. F. T.*

PROBLEME VI.

194. *Connoissant les trois angles d'un triangle, trouver chacun des trois côtés.*

SOLUTION.

On fera un triangle DEF (*fig.* 11.) dont les trois côtés soient suppléments des angles du triangle donné; ensuite par l'une des constructions du problême précédent on cherchera les angles de ce nouveau triangle, lesquels seront les suppléments des côtés que l'on demande. *C. Q. F. T.*

Scholie général pour les solutions précédentes.

195. On voit que les six derniers Problêmes donnent la solution Géometrique de tous les cas des triangles sphériques obliquangles. Les constructions peuvent également s'appliquer aux triangles rectangles, & n'en deviennent que plus simples. Nous nous sommes dispensés de démontrer chaque solution en particulier, parce qu'elles se déduisent toutes comme autant de corollaires de la construction générale des projections ortographiques, expliquées ci-devant au n°. 161. & développées sur la figure 16, dont l'intelligence bien supposée donne toutes les notions qui pourroient devenir nécessaires pour une démonstration complette de nos solutions. Nous ajouterons encore quelques problêmes relatifs à cette espece de projection qui est celle dont on fait le plus d'usage en Astronomie.

PROBLEME VII.

PROBLEME VII.

195. *Connoissant l'ellipse qui est la projection ortographique d'un grand cercle, trouver sur le plan de projection l'apparence des poles de ce même grand cercle; & réciproquement, ayant les poles projettés d'un grand cercle, trouver l'ellipse qui est la projection de ce grand cercle.* (fig. 19.)

SOLUTION.

Imaginons que la droite A*a* nous représente le plan du grand cercle de la sphere, auquel se fait la projection ortographique de tous les points de la surface sphérique; & que P*p* perpendiculaire à GL est l'axe du cercle à projetter, lequel sera par conséquent représenté par GL. Il est de plus évident que le cercle AB*ab* qui passe par les poles P, *p* du cercle à projetter, sera perpendiculaire au plan de projection. Cela posé, si l'on abaisse les perpendiculaires Pϖ, Gg, il est aisé de voir que ϖ sera la projection du pole P, & *g* sera celle de l'extrémité G du diametre GL du cercle à projetter : mais à cause de l'angle droit GCP, l'angle GCA est complément de l'angle *a*CP qui désigne l'élevation du pole sur le plan de projection. D'où il suit que la distance Cϖ de la projection du pole P d'un grand cercle C, est égale au cosinus de l'élevation du pole sur le plan de projection; ou, ce qui revient au même, au sinus de l'élévation du cercle à projetter sur le même plan de projection; & le demi petit axe de l'ellipse qui est la projection de ce cercle, est égal au sinus de l'élevation du pole sur le plan de projection. *C. Q. F. T. & D.*

PROBLEME VIII.

196. *Trouver les dimensions de l'ellipse qui est la projection ortographique d'un petit cercle de la sphere.* (fig. 19.)

SOLUTION.

Que la ligne MON repréſente le diametre du petit cercle dont on demande la projection ortographique. Cette ligne MN étant perpendiculaire à l'axe P*p*, le petit cercle qu'elle repréſente ſera parallele au cercle GL dont l'axe eſt P*p*. Cela poſé, des points M, O, N ſoient abaiſſées les perpendiculaires M*m*, O*o*, N*n* à la ligne A*a*; il eſt viſible que le point *o* ſera le centre de l'ellipſe qui doit être la projection du petit cercle MN parallele à GL, & que *mn* ſera le petit axe de cette même ellipſe. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CPϖ, CO*o* on aura CP : CO : : Cϖ : C*o*. c'eſt-à-dire, *le rayon eſt au ſinus de la diſtance du petit cercle au grand cercle qui lui eſt parallele, comme le coſinus de la hauteur du pole ſur le plan de projection eſt à la diſtance* C*o* *du centre* o *de l'ellipſe à décrire au centre* C. Les triangles ſemblables GC*g*, MOR donnent auſſi GC : C*g* : : MO : OR ou *om* = *on*. C'eſt-à-dire, *le ſinus total eſt au ſinus de l'élévation du pole ſur le plan de projection, comme le ſinus de la diſtance du petit cercle au pole eſt au demi petit axe de l'ellipſe à décrire*, & dont le grand axe ſera viſiblement égal à MN. On peut auſſi trouver le point *m*, en prenant C*m* égal au ſinus de la différence des arcs MG, BG. Ce qui ſuffit pour décrire l'ellipſe demandée. *C. Q. F. T.*

Application des derniers Problêmes aux projections dont on fait uſage dans la Théorie des Eclipſes.

197. La Terre étant à une diſtance prodigieuſe du Soleil, tous les rayons qui viennent de cet aſtre à notre globe peuvent être regardés comme paralleles; & ſi l'on imagine un plan perpendiculaire au rayon mené du centre du ſoleil au centre de la terre, ce plan qui coupera la ſphere en deux parties égales, repréſentera le diſque de

la terre applatie vu du soleil ; il sera aussi celui qui sépare l'hémisphere éclairé de l'hémisphere obscur ; & enfin tous les points de l'hémisphere exposé au soleil seront projettés ortographiquement sur ce même plan. Cela posé ; si P, *p* représentent les poles du monde, la ligne GL désignera l'équateur ; le petit cercle MN sera un parallele dont GM est la latitude Géographique. Le cercle AB*ab* sera le cercle que les Astronomes appellent méridien universel, la ligne BC désignera le rayon qui vient du centre du soleil au centre de la terre, & par conséquent l'arc BG sera la déclinaison du soleil. La ligne AC*a* sera une ligne perpendiculaire au plan du cercle B*cb*, sur laquelle se projette l'axe de l'écliptique aux solstices, & qui fait avec ce même axe un angle égal à l'obliquité de l'écliptique aux points équinoxiaux. AC*a* représentera le cercle sur lequel tous les points vus du soleil se projettent ortographiquement : *a*P sera la hauteur du pole sur le disque éclairé ; qui est égale, comme on le voit, à la déclinaison du soleil. D'après toutes ces définitions, si l'on veut tracer l'ellipse qui est la projection du parallele MN, il est évident que le problême est précisément le même que nous venons de résoudre au dernier article ; & les analogies que nous avons données pour trouver le centre *o* de l'ellipse à décrire & son demi petit axe se réduiront aux deux suivantes : *Le rayon est au sinus de la latitude géographique du parallele, comme le cosinus de la déclinaison du soleil est à la distance* C*o* ; & ensuite *le sinus-total est au sinus de la déclinaison du soleil, comme le cosinus de la latitude géographique du parallele est au demi petit axe de l'ellipse qui est la projection de ce même parallele.*

198. Comme ces solutions graphiques se rencontrent souvent dans l'Astronomie, particuliérement dans la détermination des passages des planetes sur le disque du soleil, j'ajouterai ici la maniere de tracer sur le disque

éclairé le parallele d'un lieu dont la latitude est connue ; d'après ce que nous venons de démontrer.

Soit AG*a* Q (*fig*.20) le cercle sur lequel se doit faire la projection. Par un point A quelconque de la circonférence soit mené le diametre A*a*, & soit pris de part & d'autre de ce point les arcs AP, A*p* égaux à la déclinaison du soleil pour le temps où l'on demande la projection. Soit tirée la corde P*p* qui coupera le diametre A*a* dans un point ϖ; ce point sera visiblement la projection du pole P. Soit aussi mené au point P le rayon CP, auquel on élévera le diametre ÆCQ qui lui soit perpendiculaire, & qui représentera l'équateur; des points Q, Æ on prendra les arcs ÆL, Q*l* égaux à la latitude du lieu; vers A, si elle est de même dénomination que la déclinaison du soleil, & l'on tirera la corde L*l*, qui coupera le diametre P*p'* dans un point K, par lequel on menera H*h* parallele à P*p*; ce qui donnera le centre de l'ellipse à décrire en O. Enfin l'on prendra CN égal au sinus de la différence des arcs AP, ÆL, & ON sera le demi petit axe de l'ellipse demandée, dont le grand axe M*m* est égal à L*l*; ayant de plus pris O*n*=ON, sur les axes M*m*, N*n*, on décrira une ellipse MN*mn* qui sera la projection du parallele donné pour le jour où la déclinaison du soleil est égale à l'arc AP. Cette ellipse étant tracée touchera le cercle AG*a*Q dans deux points G, I: si l'on tire la ligne GI qui se trouvera perpendiculaire au rayon CA; l'arc GNI réduit en heures, minutes & secondes de temps, désignera la durée du jour pour le parallele au temps où la déclinaison est égale à l'arc AP.

199. On peut aussi trouver aisément sur le même plan la projection de l'équateur. Pour cela, des extrêmités Æ, Q du diametre ÆQ qui représente l'équateur, on n'a qu'à abaisser les perpendiculaires ÆS, Q*s*, & sur les axes B*b*, S*s* décrire l'ellipse BS*bs* qui sera la projection de l'équateur terrestre vu du soleil au temps où la déclinaison est égale à l'arc AP.

200. Enfin l'on peut encore trouver sur le même plan la projection de l'écliptique, ainsi que les points équinoxiaux. Pour y parvenir, on fera réflexion que l'axe de l'équateur faisant toujours avec l'axe de l'écliptique un angle égal à l'obliquité de l'écliptique ; le pole P décrira autour de l'axe de l'écliptique la circonférence d'un petit cercle, dont le rayon est égal au sinus de cette même obliquité, lequel petit cercle est la base d'un cône dont la hauteur est égale au cosinus de cette même obliquité, qui est aussi l'axe de l'écliptique. Cela posé, pour avoir cet axe; sur la ligne C♑ comme diametre, on décrira un demi-cercle CV♑, dans lequel on inscrira une ligne CV égale au cosinus de l'obliquité de l'écliptique ; & tirant la ligne VC*r*, on aura visiblement l'axe de ce même grand cercle. De plus à cause que le soleil est toujours dans le plan de l'écliptique, il est visible que ce grand cercle doit être représenté par une ligne droite ; tirant donc ECT perpendiculaire à l'axe RC*r* de l'écliptique, cette ligne sera la projection de ce cercle, & les points ♈, ♎ où elle coupe l'ellipse BS*bs*, seront les points équinoxiaux. Enfin si par le point ♈ on fait passer l'ordonnée *f*♈F perpendiculaire au diametre B*b*, elle déterminera l'arc *a*F égal à l'ascension droite du soleil; & si l'on mene encore par le même point la ligne ♈D, qui soit perpendiculaire au diametre ECT, l'arc *r*D sera la mesure de la longitude du soleil. On pourroit aussi trouver avec la même facilité l'apparence des points solstitiaux sur l'équateur & sur l'écliptique. Mais nous n'insisterons pas plus long-temps sur cette partie, il nous suffira de faire voir avec quelle facilité on peut appliquer les projections ortographiques aux principaux problêmes de l'Astronomie sphérique. Nous observerons encore que l'on ne s'est pas formé de ces constructions une idée assez juste parmi quelques Astronomes. Les uns rejettent absolument ces constructions comme trop peu exactes ; les autres les employent avec trop de

confiance. L'usage qu'il nous paroît qu'on en devroit faire, c'est celui qu'on fait en général de toutes les figures de Géometrie qui ne servent qu'à guider l'esprit dans la recherche des formules numériques que l'on peut trouver, en appliquant à ces constructions l'analyse algébrique ou les regles générales de la Trigonométrie. Dans cette vue nous ajouterons encore quelques corollaires sur les problêmes précédents pour mieux éclaircir la Théorie des projections.

Corollaire I.

201. Il suit du dernier problême que pour déterminer sur une ellipse quelconque qui est la projection d'un grand cercle un arc d'un nombre quelconque de degrés en commençant d'un point donné sur cette ellipse ; il n'y a qu'à abaisser de ce point une perpendiculaire au grand axe prolongée jusqu'à la circonférence du cercle décrit sur ce grand axe comme diametre, & ensuite prendre sur la circonférence de ce même cercle, en commençant du point où cette ordonnée coupe la circonférence, un arc égal au nombre de degrés donnés; puis abaisser de son extrêmité une nouvelle ordonnée au grand axe de l'ellipse, laquelle déterminera sur la circonférence de l'ellipse un arc du nombre de degrés donné. (*fig.* 21).

Corollaire II.

202. Si l'arc donné est de 90°; ayant abaissé du point donné une perpendiculaire à l'axe de l'ellipse, on prendra sur le même axe de l'autre côté du centre une ligne égale au sinus de l'arc entre l'extrémité de l'axe la plus proche du point donné, & la perpendiculaire ou l'ordonnée qui passe par le point donné. Par exemple, pour déterminer un arc de 90° sur l'ellipse AC*da* à partir du point C, on n'aura qu'à prendre la ligne Gλ égale au sinus *l*H de l'arc A*l* = AC, terminé à l'or-

donnée qui passe par le point donné, & ensuite par le point λ, ainsi déterminé, élever la perpendiculaire $\lambda l'$ qui donnera sur cette ellipse l'arc Cl' de 90°. De même en prenant sur le demi grand axe Gb de l'ellipse BCb la ligne $G\varphi$ égale au sinus fX de l'arc $BF = BC$, & élevant la perpendiculaire $\varphi f'$, on aura sur cette même ellipse l'arc Cf' de 90°.

COROLLAIRE III.

203. Il suit, de ce qui précede, qu'il est présentement fort aisé de trouver sur le plan du cercle $ABRar$ la mesure de l'angle C ou BCA; car un angle sphérique quelconque ayant pour mesure l'arc de grand cercle compris entre ses côtés & décrit de son sommet comme pole, il est visible que tout se réduit à tracer l'ellipse Qgq qui est la projection du grand cercle dont le pole est en C; ce qui se fera de la maniere suivante. Ayant tiré par le point C & le centre G le diametre $PCGp$, on lui menera par les points G, C les perpendiculaires QGq, $G'Cg'$; ensuite on prendra sur Gp une partie GS égale à $G'C$ qui est le sinus d'élévation du point C sur le plan de projection; & cette ligne sera le demi petit axe de l'ellipse qui est la projection du grand cercle dont le pole est en C. Donc les points l', f' où cette ellipse coupe les ellipses Ada, Bnb détermineront l'arc $f'l'$ dont le correspondant $\beta\gamma$ sur le cercle $ABRr$ compris entre les ordonnées $\gamma\Lambda$, $\beta\Phi$ sera la mesure de l'angle en C.

COROLLAIRE IV.

204. Il est encore aisé de voir que pour trouver la mesure de l'angle en C, on n'a pas besoin de tracer l'ellipse qui est la projection du grand cercle dont cet angle est le pole. Car ayant déterminé comme ci-devant les points l', f' sur les ellipses ACa, Bnb; si de ces points l'on abaisse au diametre QGq perpendiculaire à GCP, les

ordonnées $l'\lambda$, $f'\phi$; leurs prolongements jusqu'à la circonférence du cercle ARar détermineront l'arc $\beta\gamma$ égal à la mesure de l'angle en C.

PROBLEME IX.

205. *Trouver sur la surface du cercle* ABRr, 1°, *la projection de l'arc* Aδ *abaissé de l'angle* A *perpendiculairement au côté opposé* BC; 2°, *la grandeur des segments* Bδ, Cδ *du côté* BC; 3°, *les segments de l'angle* BAC; 4°, *la valeur de la perpendiculaire* Aδ. (*fig.* 21).

SOLUTION.

Puisque l'arc dont on cherche la projection, appartient à un grand cercle de la sphere qui passe par le point A, il est visible que la ligne AGa sera le grand axe de l'ellipse qui doit en être la projection. De plus, à cause que ce cercle est supposé perpendiculaire au côté BC, il doit passer par le pole de ce même arc BC, & par conséquent l'ellipse demandée doit aussi passer par la projection de ce pole. Or en prenant sur le rayon Gm une partie GZ = Nn, le point Z sera le pole de l'arc BC (n°. 195); donc ce point sera un de ceux de l'ellipse à décirire. Je mene donc par ce point Z une ligne Zζ perpendiculaire au diametre Aa, & je la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle ARar en un point θ. Je prends sur RG une ligne Gρ quatrieme proportionnelle aux lignes $\theta\zeta$, ζZ, RG; & je décris sur les demi-axes GA & Gρ l'ellipse A$\delta\rho a$ qui est la projection demandée du cercle perpendiculaire à BC. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Par le point δ où cette ellipse coupe le côté BC, je mene la perpendiculaire $\nu\delta\omega\mu$ au rayon GB, & les arcs Fμ, Bμ sont les segments du côté BC. *C. Q. F.* 2°, *T.*

3°, Si par le point ρ on éleve la perpendiculaire $\rho\sigma$ au rayon GR, les arcs Rσ, Dσ seront les mesures des segments BAδ, CAδ de l'angle BAC. *C. Q. F.* 3°, *T.*

4°. Enfin si par le point δ on tire l'ordonnée $\epsilon\delta\pi$

perpendiculaire au rayon GA, l'arc An sera la valeur de la perpendiculaire Aδ. *C. Q. F.* 4°, *T.*

PREMIER SCHOLIE.

206. Si l'on demandoit de déterminer la projection du cercle qui divise l'angle BAC en deux également, on la trouveroit par une construction absolument semblable; en prenant sur le rayon GR une ligne Gk égale au cosinus de la moitié de l'angle BAC; & décrivant une ellipse sur les demi-axes GA & Gk : on voit de plus que la construction expliquée au n°, 202, donneroit de la même maniere la solution du problême, en supposant que l'on ait abaissé une perpendiculaire de l'angle C, sur le côté AB prolongé autant qu'il seroit nécessaire. Enfin l'on voit dans la construction du dernier problême que l'arc Rθ est égal à l'arc Aδ perpendiculaire au côté BC, à cause que les arcs AR, $n\theta$ de 90° chacun ont une partie commune nR.

SECOND SCHOLIE.

207. Cette construction nous conduit naturellement à une démonstration fort simple & fort élégante d'une des fameuses analogies de *Néper*, telle à peu près qu'elle se trouve dans son Traité intitulé *Logarithmorum mirifici Canonis Constructio.* Ayant déterminé toutes les parties dont on vient de parler par la méthode que nous venons d'expliquer, soit élevée à l'extrémité A du diametre Aa la perpendiculaire indéfinie Aλ (*fig.*22); il est clair que si du point B comme pole on décrit sur la surface de la sphere un petit cercle dont le rayon circulaire soit égal à l'arc BC, ce cercle passera par les points L, C, c, l: De plus soient encore menées par les points C, c les droites FCf, $\varpi\omega co$ paralleles à la tangente AK; il est visible que l'arc Af sera égal à l'arc AC, & que Ao sera égal à l'arc Ac qui est la différence des segments Aδ, δC formés sur ce même côté AC par la

perpendiculaire Bδ. Cela posé, si l'on tire encore du point *a* par les points L, *l*, *f*, *o*, les droites *a*LΛ, *al*λ, *af*K, *ao*k prolongées jusqu'à la tangente AΛ; il est aisé de voir que les quatre points Λ, λ, K, *k* appartiennent à la circonférence d'un cercle décrit sur le plan représenté par AΛ, & tangent à la sphere en A, lequel cercle est la base d'un cône oblique qui a son sommet au point *a*. Pour le démontrer, il suffira de prouver que la section du cône qui auroit pour base le cercle décrit sur le diametre *l* L par le plan AΛ, est anti-parallele à cette même base; car on fait voir dans tous les traités de sections coniques que cette section est un cercle. Or c'est ce qui arrive ici. Car l'angle AΛ*a* étant formé par une tangente & par une corde, aura pour mesure la moitié de la différence des arcs AF*a*, A*f*L compris entre ses côtés; mais AL = AI, donc AF*a* — A*f*L = AF*a* — AFI = *a*I = *a*L; or la moitié de ce dernier arc est précisément la mesure de l'angle *a l* L; donc les triangles *a l* L, *a* Λ λ sont semblables; donc le cône est coupé anti-parallélement à sa base, & par conséquent le cercle décrit sur *l*L sera projetté en cercle sur le plan AΛ; donc enfin les sécantes intérieures donneront AK : AΛ :: Aλ : A*k*, c'est-à-dire, *la tangente de la demi-base* AC *est à la tangente de la demi-somme des côtés* AB, BC; *comme la tangente de la demi-différence des mêmes côtés est à la tangente de la demi-différence des segments de cette même base.*

Pour se convaincre de l'identité des deux dernieres proportions, on fera attention que si l'on regarde le diametre A*a* comme rayon, les lignes dont on vient de parler, seront les tangentes des angles au point *a*. D'ailleurs ces angles A*a*λ, A*ak*, A*a*K, A*a*Λ ayant leur sommet à la circonférence du cercle AL*a*, ont pour mesure la moitié des arcs compris entre leurs côtés. Or l'arc A*f* par construction est égal à la base AC du triangle sphérique BAC; l'arc AL est égal à la somme

des côtés AB + BC, & A*l* est égal à la différence des mêmes côtés; enfin puisque les arcs A*c*, A*o* sont d'un même nombre de degrés étant compris entre plans paralleles AΛ, ϖo, il est clair que A*o* sera la différence des segments de la base. *C. Q. F. D.*

Troisieme Scholie.

208. On voit par ce qu'on vient de démontrer que nous avons employé ici deux projections; l'une ortographique de toutes les parties du triangle sur le plan du cercle AL*a*; l'autre sur le plan représenté par AK, dans laquelle on suppose l'œil placé au point *a*, qui peut être pris pour l'un des poles de la sphere, ce qui a fait nommer cette espece de projection, *projection polaire*; laquelle a beaucoup d'analogie avec les projections *stréréographiques* dont on fait un grand usage dans les Cartes Géographiques, & ne différe de ces projections, qu'en ce que dans ces dernieres l'on suppose l'œil à un point quelconque de la surface de la sphere, & l'on imagine que la projection de l'hémisphere opposé se fait sur le plan du grand cercle prolongé autant qu'il est nécessaire, & perpendiculaire au rayon mené du centre de la sphere au lieu de l'œil sur la surface sphérique. L'avantage de ces projections vient de ce qu'elles ont la propriété de donner toujours des figures semblables à celles qu'il s'agit de projetter, & par conséquent de représenter sur un plan la Carte d'un pays par des figures semblables à celles qu'elles forment sur la surface du globe.

Cette propriété importante est une suite nécessaire de ce que les cônes de projections sont toujours coupés anti-parallélement par le plan de projection. Ceux qui veulent étudier à fond cette partie, peuvent recourir à l'ouvrage du Pere *Tacquet*, ainsi qu'aux Traités d'Optique du Pere d'*Aiguillon*. Nous ajouterons encore ici le problême suivant qui donne une solution extrêmement

ſimple de pluſieurs cas des triangles ſphériques, & qui eſt une nouvelle eſpece de ſolution graphique.

PROBLEME X.

209. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle* BAC *trouver un angle quelconque de ce même triangle par le développement de ſes parties*, (fig. 23).

SOLUTION.

Sur un cercle quelconque BAC, on prendra les trois arcs AB, AC & B*c*′ reſpectivement égaux à chacun des côtés du triangle à réſoudre. Enſuite ayant tiré le rayon GA, ſi c'eſt l'angle A qu'on veut avoir, on lui menera la tangente *d*AD terminée en *d* & D par les prolongements des rayons GC & GB. Sur le rayon G*c*′ prolongé, autant qu'il ſera néceſſaire, on prendra une ligne G*d*′ égale à la ſécante G*d* du côté AC; enfin des points D, A comme centre avec les rayons D*d*′, A*d*, on décrira deux arcs de cercle qui ſe couperont dans un point δ, & donneront l'angle δAD égal à l'angle A du triangle BAC. On trouveroit par une conſtruction ſemblable les deux autres angles du même triangle. De plus il eſt viſible que cette ſolution porte avec elle ſa démonſtration; car les deux lignes AD, A*d* ou Aδ étant les tangentes des arcs AB, AC, & par conſtruction perpendiculaires à l'interſection commune AG des plans BAG, CAG, l'angle qu'elles forment, lorſqu'elles ſont terminées par la ligne Dδ = D*d*′, eſt viſiblement égal à l'angle en A du triangle BAC. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE I.

210. Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire uſage de cette conſtruction pour réſoudre un triangle dont on auroit les trois angles, en appliquant cette ſolution à un triangle dont toutes les parties ſeroient ſupplé-

ment de celles du triangle à résoudre (n°. 131).

COROLLAIRE II

211. Il n'est pas moins évident qu'on pourroit faire usage de cette construction pour résoudre un triangle, dans lequel on connoîtroit deux côtés & l'angle compris. Car ayant fait les arcs AB, AC respectivement égaux aux côtés de l'angle donné, & tiré les tangentes AD, A*d* terminées aux rayons GB & GC prolongés, autant qu'il feroit nécessaire; il n'y auroit plus qu'à faire l'angle DAδ égal à l'angle donné, & tirer Dδ, après avoir pris Aδ égal à la tangente A*d*. Enfin des points G, D comme centre avec les rayons G$d' =$ Gd, D$d' =$ Dδ on décriroit deux arcs de cercles qui par leur intersection détermineroient un point d', duquel menant au centre G le rayon d'G, on auroit l'arc Bc' égal au troisieme côté, & par le moyen duquel on trouveroit les autres angles.



CHAPITRE QUATRIEME.

De la Résolution analytique ou algébrique des Triangles sphériques quelconques.

AVERTISSEMENT.

Tous les calculs que nous aurons à faire dans ce Chapitre, étant appuyés sur les constructions expliquées au chapitre précédent, il est absolument nécessaire de les avoir bien entendues. D'ailleurs, pour ne pas rendre ces calculs trop difficiles pour les Commençants par la variété des signes, nous les appliquerons à la figure 17, dont toutes les parties seront désignées comme on le voit dans la table suivante. Si quelques termes viennent à changer de signes en faisant l'application de ces formules à d'autres triangles, cela avertit que les angles que nous avons supposés aigus ou obtus, deviennent obtus ou aigus, ou que les mêmes changements ont lieu sur les côtés.

Soit donc pour chaque partie du triangle BAC, en supposant toujours le sinus total $= r$.

Sin AB $=$ BK $= a$.	*Sin* ABC $=$ N$n = m$.
Cos AB $=$ GK $= b$.	*Cos* ABC $=$ G$n = n$.
Sin BC $=$ FX *ou* fX $= c$.	*Sin* BAC $=$ D$d = p$.
Cos BC $=$ GX $= d$.	*Cos* BAC $=$ G$d = q$.
Sin AC $=$ LH *ou* lH $= f$.	*Sin* ACB $= h = \frac{ap}{c} = \frac{am}{f}$.
Cos AC $=$ GH $= g$.	*Cos* ACB $= k = \sqrt{\frac{r^2c^2 - a^2p^2}{cc}}$.

Les constructions expliquées au (nº. 161) donneront de plus les valeurs suivantes des lignes CX, Cf, &c.

Tang AB $=\frac{ar}{b}$	CX $=\frac{cn}{r}$
Tang BC $=\frac{cr}{d}$	Cf $=c-\frac{cn}{r}$
Tang AC $=\frac{fr}{g}$	CF $=c+\frac{cn}{r}$
Tang B $=\frac{mr}{n}$	CH $=\frac{fq}{r}$
Tang A $=\frac{pr}{q}$	CL $=f+\frac{fq}{r}$
Tang C $=\frac{hr}{k}$	Cl $=f-\frac{fq}{r}$

Pour une plus grande commodité, & afin de ne pas confondre toutes ces dénominations, il est à propos de les relever toutes sur une feuille volante, & l'on ne sera point obligé de retourner sans cesse à cette Table, afin d'y retrouver l'expression analytique de chaque ligne.

PROBLEME I.

212. *Trouver le rapport entre les sinus des angles & les sinus des côtés, pour un triangle sphérique quelconque.* (fig. 17.)

SOLLUTION.

A cause des sécantes fF, lL intérieures au cercle, on aura CF × Cf = CL × Cl; ou, ce qui revient au même, $f\text{X}^2 - \text{CX}^2 = l\text{H}^2 - \text{CH}^2$; & substituant à ces quantités leurs valeurs algébriques, on aura $c^2 - \frac{c^2n^2}{r^2} = f^2 - \frac{f^2q^2}{r^2}$ ou $c^2r^2 - c^2n^2 = f^2r^2 - f^2q^2$; mettant m^2 à la place de $r^2 - n^2$ & p^2 pour $r^2 - q^2$, on aura $c^2m^2 = f^2p^2$, & tirant les racines de chaque membre, puis les mettant en proportion, on aura $c : f :: p : m$; c'est-à-dire, *sin* BC : *sin* AC :: *sin* BAC : *sin* ABC. On voit donc

que dans un triangle sphérique quelconque les sinus des angles sont entr'eux, comme ceux des côtés opposés. *C.Q.F.T.*

PROBLEME II.

213. *Connoissant deux côtés & l'angle compris, trouver 1°, un angle quelconque; 2°, le troisieme côté.* (fig. 17.)

Soient AB & AC les côtés connus avec l'angle BAC compris entre ces côtés; & cherchons d'abord l'angle B. A cause des triangles semblables GKB, GHO, on aura GK : KB : : GH : HO; ou $b : a :: g : \frac{ag}{b}$; de plus on a par construction Gr : Gd : : lH : CH; ou $r : q :: f : \frac{fq}{r}$; donc CO ou CH + HO $= \frac{fq}{r} + \frac{ag}{b}$; encore il est visible que l'angle OCX du triangle rectangle CXO est égal à l'angle AGB; or on a dans ce même triangle CXO, R : *cosin* AB : : CO : CX. Donc CX $= \frac{bfq}{rr} + \frac{ag}{r}$. Enfin à cause que les lignes fX, CX; MG, nG sont proportionnelles par construction (n°. 161) on aura fX : CX : : MG : nG, ou analytiquement $c = \frac{fp}{m}$ (n°. 212) : $\frac{bfq}{rr} + \frac{ag}{r} :: r : n$; d'où l'on tire $\frac{nfp}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$, ce qui donne $\frac{m}{n} = \frac{r^2fp}{bfq + agr}$; & divisant les deux termes de la fraction qui est le second membre de l'équation par f, on aura enfin $\frac{m}{n} = \frac{r^2p}{bq + \frac{agr}{f}}$; c'est-à-dire, *tang* B $= \frac{\text{RR} \times \textit{sin}\ \text{A}}{\textit{sin}\ \text{AB} \times \textit{cot}\ \text{AC} + \textit{cos}\ \text{AB} \times \textit{cos}\ \text{A}}$. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Pour avoir le troisieme côté BC, il n'y a qu'à regarder le sinus de ce côté comme inconnu, en mettant c au lieu de $\frac{fp}{m}$ dans l'équation $\frac{nfp}{m} - ag = \frac{bfq}{r}$ ce qui

ce qui donnera $c = \frac{ag}{n} + \frac{bfq}{rn}$, d'où l'on tire *sin* BC $= \frac{cos\,AC \times sin\,AB}{cos\,B} + \frac{cos\,AB \times cos\,A \times sin\,AC}{R \times cos\,B}$. *C. Q. F.* 2°, *T.*

COROLLAIRE.

214. Il est aisé de voir que selon les côtés que l'on supposera connus avec l'angle compris ; on trouveroit pour chaque angle des formules semblables à celles que nous avons trouvées pour l'angle B, ainsi l'on aura les formules suivantes.

$$Tang\ B = \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AB \times cot\,AC + cos\,AB \times cos\,A} = \frac{RR \times sin\,C}{sin\,BC \times cot\,AC + cos\,BC \times cos\,C}.$$

$$Tang\ C = \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AC \times cot\,AB + cos\,AB \times cos\,A} = \frac{RR \times sin\,B}{sin\,BC \times cot\,AB + cos\,BC \times cos\,B}.$$

$$Tang\ A = \frac{RR \times sin\,C}{sin\,AC \times cot\,BC + cos\,AC \times cos\,C} = \frac{RR \times sin\,B}{sin\,AB \times cot\,BC + cos\,AB \times cos\,B}.$$

On doit remarquer que la plupart de ces formules changeront de signe, suivant les différentes combinaisons des angles aigus ou obtus ; ainsi lorsqu'on voudroit en faire l'application à quelque cas particulier, il faudroit y avoir attention. Par exemple, si l'on cherche l'angle B du triangle BAC (*fig.* 18.) dont on suppose les côtés AB, AC connus avec l'angle A qu'ils comprennent, on trouvera comme dans la figure 17, HO $= \frac{ag}{b}$, CH $= \frac{fq}{r}$; mais CO est égal à HO — CH. Ainsi la tangente de l'angle B devient $= \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AB \times cot\,AC - cos\,AB \times cos\,A}$.

Pareillement le terme $cos\,AC \times cos\,A$ deviendroit négatif dans la formule qui donne la tangente de C.

PROBLEME III.

215. *Supposant les mêmes données qu'au problême précédent, il faut trouver le troisieme côté indépendamment des angles adjacents à ce côté.*

SOLUTION.

Pour la facilité du calcul, nous supposerons que les deux côtés connus sont AB & BC, avec l'angle B qu'ils comprennent (*fig.* 17 & 18). Il est visible que tout se réduit à trouver le sinus lH ou le cosinus GH du côté AC. Cela posé dans le triangle rectangle CXO; l'on a $cos\,AB : sin\,AB :: CX : XO$ ou $b : a :: \frac{cn}{r} : \frac{acn}{br}$; donc GO ou $GX + XO = d + \frac{acn}{br}$. Enfin au triangle rectangle GHO, l'on a $R : cos\,AB :: GO : GH$; & mettant les valeurs algébriques, $r : b :: d + \frac{acn}{br} : \frac{bd}{r} + \frac{acn}{rr} = cos\,AC$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

216. Donc en général dans un triangle sphérique quelconque, on aura les formules suivantes pour trouver un côté quelconque, lorsque l'on connoît les deux autres, & l'angle compris.

$$Cos\,AC = \frac{\pm cos\,B \times sin\,AB \times sin\,BC + R \times cos\,AB \times cos\,BC}{RR}.$$

$$Cos\,AB = \frac{\pm cos\,C \times sin\,AC \times sin\,BC + R \times cos\,AC \times cos\,BC}{RR}.$$

$$Cos\,BC = \frac{\pm cos\,A \times sin\,AB \times sin\,AC + R \times cos\,AB \times cos\,AC}{RR}.$$

COROLLAIRE II.

217. Il suit de ces formules que si l'on nomme Y

le sinus-verse d'un angle quelconque C; on aura $V = \frac{R^2 \times \overline{cos(BC-AC) - cos AB}}{sin AC \times sin BC}$. Pour le démontrer, dans l'expression de *cos* AB trouvée au dernier corollaire, il n'y a qu'à mettre R — V à la place de *cos* C, & l'on aura $cos AB \times RR = cos AC \times cos BC \times R + sin AC \times sin BC \times R - sin AC \times sin BC \times V$; mais (n°. 24.) $cos AC \times cos BC + sin AC \times sin BC = R \times cos (BC - AC)$; donc en substituant cette valeur après les réductions ordinaires, on trouvera $V = \frac{R^2 \times \overline{cos(BC-AC) - cos AB}}{sin AC \times sin BC} = \frac{2R \times \overline{cos(BC-AC) - cos AB}}{cos(BC-AC) - cos(BC+AC)}$, en mettant pour *sin* AC × *sin* BC sa valeur déduite de ce que l'on a démontré au n°. 26.

COROLLAIRE III.

218. Si dans le numérateur de la premiere valeur de V à la place de *cos* (BC — AC) — *cos* AB, l'on substitue sa valeur tirée de ce que l'on a démontré au n°. 58. On aura cette nouvelle expression ....

$$V = \frac{2R \times (sin (\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC) \times sin (\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{2}BC).)}{sin AC \times sin BC},$$

& parce que l'on a fait voir (n°.22.) que *sin. verse* d'un angle $= \frac{2 sin^2 \frac{1}{2} angle}{R}$, on aura par cette derniere substitution

$$Sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{RR \times sin \left(\frac{AB+BC-AC}{2}\right) \times sin \left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right)}{sin AC \times sin BC},$$

& tirant les racines

$$Sin \tfrac{1}{2} C = \frac{R \times \sqrt{sin\left(\frac{AB+BC+AC}{2} - AC\right) \times sin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - BC\right)}}{\sqrt{sin AC \times sin BC}}$$

qui est la formule que nous avons déja trouvée dans le second Chapitre pour avoir un angle quelconque d'un triangle dont on connoît les trois côtés; ce qui fait voir comment on peut découvrir toutes les formules en usage par l'analyse algébrique.

SCHOLIE.

219. Suppoſant toujours que l'on connoît les deux côtés d'un triangle & l'angle compris, on pourroit chercher le troiſieme côté par ſon ſinus. Ainſi connoiſſant les côtés AB, AC du triangle BAC avec l'angle A qu'ils comprennent, on pouroit demander le ſinus du troiſieme côté BC, & l'on trouveroit

$c = \frac{\sqrt{b^2f^2q^2 + 2abfgqr + a^2g^2r^2 + p^2f^2r^2}}{rr}$, expreſſion, comme l'on voit, trop compliquée pour en faire uſage dans la pratique des calculs.

PROBLEME IV.

220. *Connoiſſant deux angles ſur un côté, trouver* 1°, *un côté quelconque;* 2°, *le troiſieme angle.*

SOLUTION.

Soit AB le côté donné avec les angles A & B ſur ce côté; & ſoit AC l'un des côtés que l'on demande dont il faut par conſéquent regarder le ſinus ou coſinus comme inconnu. J'aurai d'abord fX ou *ſin* BC $= \frac{pf}{m}$ (n°. 211.) je cherche enſuite l'expreſſion de HO par cette analogie *coſ* AB : *ſin* AB : : GH : HO, ou $b : a :: g : \frac{ag}{b} =$ HO. Nous avons auſſi CH $= \frac{fq}{r}$; donc CO = HO $\pm$ CH (*fig.* 17 & 18) $= \frac{ag}{b} \pm \frac{fq}{r}$; mais au triangle rectangle CXO, l'on a R : *coſ* AB : : CO : CX, & en mettant les valeurs analytiques la proportion deviendra ... $r : b :: \frac{ag}{b} \pm \frac{fq}{r} : \frac{ag}{r} \pm \frac{bfq}{rr} =$ CX; enfin à cauſe des lignes proportionnelles MG, nG; fX, CX, on aura cette derniere analogie R : *coſ* B : : *ſin* BC ou fX : CX; & par algebre $r : n :: \frac{fp}{m} : \frac{ag}{r} \pm \frac{bfq}{rr}$, d'où l'on tire $\frac{nfp}{m}$

$= ag \pm \frac{bfq}{r}$, & par les réductions ordinaires $\frac{f}{g} = \frac{arr}{\frac{n}{m}p \mp bq}$: c. à d. en substituant les valeurs des lettres.

$tangente\ AC = \frac{RR \times \mathit{fin}\ AB}{\cot B \times \mathit{fin}\ A \mp \mathit{cof}\ AB \times \mathit{cof}\ A}$.

Le signe $-$ a lieu lorsque l'angle A est obtus, & c'est le signe $+$ lorsque cet angle est aigu. On trouveroit pareillement $tang\ AB = \frac{RR \times \mathit{fin}\ AC}{\cot C \times \mathit{fin}\ A \mp \mathit{cof}\ AC \times \mathit{cof}\ A}$.

& $tang\ BC = \frac{RR \times \mathit{fin}\ AB}{\cot A \times \mathit{fin}\ B \mp \mathit{cof}\ AB \times \mathit{cof}\ B}$. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Pour avoir le troisieme angle C, après avoir trouvé l'un quelconque des deux côtés ; soit reprise l'équation $\frac{nfp}{m} = ag \pm \frac{bfq}{r}$, de laquelle soit tirée une valeur de $\frac{am}{f} = \mathit{fin}\ C$, ce qui donnera $\frac{am}{f} = \frac{rnp \mp bmq}{gr}$ ou $\mathit{fin}\ C = \frac{\mathit{fin}\ A \times \mathit{cof}\ B}{\mathit{cof}\ AC} \mp \frac{\mathit{cof}\ AB \times \mathit{cof}\ A \times \mathit{fin}\ B}{R \times \mathit{cof}\ AC}$. C. Q. F. 2°. T.

PROBLEME V.

221. *Supposant les mêmes données qu'au problême précédent, trouver le troisieme angle sans y employer d'autres expressions que celles du côté & des angles donnés.*

SOLUTION.

Pour trouver plus aisément les formules dont nous avons besoin, nous supposerons que les deux angles connus sont A & C avec le côté AC ; ainsi l'angle B est celui qu'on demande, dont il faut par conséquent traiter le sinus m & le cosinus n comme inconnus. Nous aurons d'abord par la proportion connue entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés, $\mathit{fin}\ AB$ ou $BK = \frac{fh}{m}$ & $\mathit{fin}\ BC$ ou $fX = \frac{pf}{m}$; cela posé dans le triangle GHO, l'on a $\mathit{cof}\ AB : \mathit{fin}\ AB :: GH : HO$ ou $\frac{\sqrt{r^2m^2 - f^2h^2}}{m} : \frac{fh}{m} ::$

$g : \frac{gfh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}$; on aussi par construction R : *cos* A : : *sin* AC : CH ou $r : q : : f : \frac{fq}{r} =$ CH, donc CO = HO ± CH = $\frac{gfh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}} \pm \frac{fq}{r}$; & à cause du triangle rectangle CXO, on a R : *cos* AB : : CO : CX; & en lettres, $r : \frac{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{m} : : \frac{fgh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}} \pm \frac{fq}{r} : \frac{fgh}{mr} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mrr} =$ CX; enfin à cause des proportionnelles MG, nG, fX, CX, on aura R : *cos* B : : fX : CX, ou $r : n : : \frac{pf}{m} : \frac{fgh}{mr} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mrr}$, d'où l'on tire cette équation $\frac{pfn}{m} = \frac{fgh}{m} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mr}$; divisant chaque membre par $\frac{f}{m}$, & faisant disparoître le radical, on aura $p^2n^2 - 2pghn + g^2h^2 = q^2m^2 - \frac{f^2h^2q^2}{r^2}$; mettant encore à la place de m^2 sa valeur $r^2 - n^2$, & faisant attention que $p^2 + q^2 = r^2$, on aura après avoir tout divisé par r^2; $n^2 - \frac{2pghn}{rr} = q^2 - \frac{g^2h^2}{r^2} - \frac{f^2h^2q^2}{r^4}$; enfin complettant le quarré suivant les regles ordinaires des équations du second degré, on trouvera, après différentes réductions & substitutions, que l'équation devient $n^2 - \frac{2pghn}{rr} + \frac{p^2g^2h^2}{r^4} = \frac{q^2k^2}{r^2}$, d'où l'on tire $n = \frac{pgh}{rr} \pm \frac{qk}{r}$, c'est-à-dire, que . . . .

$$Cos\,B = \frac{sin\,A \times sin\,C \times cos\,AC}{RR} \pm \frac{cos\,A \times cos\,C}{R}.$$

On trouveroit de même que . . . .

$$Cos\,C = \frac{sin\,A \times sin\,B \times cos\,AB}{RR} \pm \frac{cos\,A \times cos\,B}{R} \text{ \& que}$$

$$Cos\,A = \frac{sin\,B \times sin\,C \times cos\,BC}{RR} \pm \frac{cos\,B \times cos\,C}{R}. \text{ C. Q. F. T.}$$

REMARQUE.

On auroit pu éviter tous les calculs que nous avons eu à faire pour résoudre le dernier Problême, en se servant d'un triangle dont toutes les parties seroient supplémens de celles du triangle BAC, & appliquant à ce triangle la formule de l'art. 215. pour en tirer par les substitutions convenables la valeur du cosinus de l'angle cherché; mais j'ai mieux aimé trouver cette valeur directement, pour faire entendre davantage ces sortes de solutions analytiques.

COROLLAIRE.

222. De la formule $tang\,AC = \frac{RR \times \sin AB}{\cot B \times \sin A \mp \cos AB \times \cos A}$ donnée au n°. 220. on tirera aisément les valeurs suivantes de la cotangente d'un côté quelconque, en renversant la fraction, & mettant $\cot AB$ pour $\frac{\cos AB}{\sin AB}$, & l'on trouvera $\cot AC = \frac{\cot B \times \sin A}{\sin AB} \mp \cot AB \times \cos A = \frac{\cot B \times \sin C}{\sin BC} \mp \cot BC \times \cos C$.

PROBLEME VI.

223. *Connoissant deux côtés & l'un des angles opposés à ces côtés, trouver 1°, l'angle compris entre les deux côtés; 2°, le côté adjacent à l'angle donné.* (fig. 17).

SOLUTION.

Soient AB & AC les côtés qu'on suppose connus, avec l'angle B opposé au côté AC; & que l'angle A soit celui qu'il faut trouver. Pour cela dans l'équation $\frac{nfp}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$ (trouvée au n°. 220.) il faut chercher une valeur de p ou de q ou de $\frac{p}{q}$ qui sont le sinus, cosinus & la tangente de l'angle A. Pour une plus grande facilité, nous ferons la tangente $\frac{m}{n}$ de l'angle B $= t$,

celle $\frac{f}{g}$ du côté AC $= s$, ce qui donnera d'abord $p - \frac{at}{s} = \frac{btq}{rr}$, ou en mettant $\sqrt{r^2 - p^2}$ à la place de q, $p - \frac{at}{s} = \frac{bt\sqrt{r^2-p^2}}{rr}$; d'où l'on tire cette équation du second degré $p^2 - \frac{2atr^4p}{s\times(r^4+b^2t^2)} = \frac{b^2t^2r^2s^2 - a^2t^2r^4}{s^2\times(r^4+b^2t^2)}$, de laquelle il faut tirer la valeur de p. Le calcul fait, on trouvera $p = \frac{atr^4 \pm btr\sqrt{r^4s^2 + b^2t^2s^2 - a^2t^2r^2}}{s(r^4+b^2t^2)}$. On trouvera de même la valeur du cosinus de cet angle en éliminant p au lieu de q, & l'on aura cette égalité ... $q = \frac{-af^2bt^2 \pm r^3\sqrt{r^4s^2 + b^2t^2s^2 - a^2t^2r^2}}{s\times(r^4+b^2t^2)}$, d'où il seroit aisé de déduire l'expression analytique de la tangente du même angle. C. Q. F. 1°. T.

2°. Supposant toujours que les côtés donnés sont AB, AC avec l'angle B; & qu'il faille trouver le côté BC, il est visible que tout se réduit à trouver le sinus fX ou le cosinus GX de ce côté. Pour cela dans l'équation $\frac{pfn}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$ dont nous avons fait usage, je chasse les inconnues p & q au moyen de leurs valeurs $\frac{cf}{m}$ & $\sqrt{r^2 - \frac{c^2f^2}{m^2}}$, dans lesquelles c doit être regardée comme inconnue; ce qui donnera $\frac{cffn}{mm} = \frac{bf}{mr}\sqrt{r^2m^2 - c^2f^2} + ag$, d'où il seroit aisé de tirer une valeur de c suivant les regles ordinaires; mais comme on arriveroit à une expression assez compliquée, il faut voir si l'on n'en pourroit pas trouver de plus simple en suivant l'analyse indiquée par la figure 17. Cela posé, dans le triangle rectangle GXT, on aura *cos* AB:R::GX:GT; ou $b : r :: d : \frac{dr}{b}$; donc TH $=$ GH $-$ GT $= g - \frac{dr}{b}$; le même triangle donne encore *cos* AB : *sin* AB ::

GX : TX ; ou $b : a :: d : \frac{ad}{b}$; & à cauſe du triangle rectangle CHT, on a *ſin* AB : R :: TH : CT, ou $a : r :: g - \frac{rd}{b} : \frac{gr}{a} - \frac{drr}{ab}$. Donc CT + TX ou CX $= \frac{gr}{a} - \frac{drr}{ab} + \frac{ad}{b} = \frac{gr - bd}{a}$; enfin à cauſe des ordonnées au cercle & à l'ellipſe GM : Gn :: fX : CX ; ou en lettres $r : n :: \sqrt{rr - dd} : \frac{gr - bd}{a}$; d'où l'on tire ſur le champ $an\sqrt{rr - da} := grr - bdr$; équation au coſinus de BC beaucoup plus ſimple que la précédente, & de laquelle on déduira $d = \frac{r^3bg \pm anr\sqrt{r^2b^2 + a^2n^2 - r^2g^2}}{r^2b^2 + a^2n^2}$: on trouveroit de même en réſolvant une autre équation du ſecond degré que

ſin BC ou $c = \frac{anrrg \pm br^2\sqrt{a^2n^2 + b^2r^2 - g^2r^2}}{a^2n^2 + b^2r^2}$, d'où l'on tireroit auſſi une valeur de la tangente du même côté BC. *C. Q. F.* 2°. *T.*

PROBLEME VII.

224. *Connoiſſant deux angles & l'un des côtés oppoſés; trouver* 1°, *le côté adjacent*; 2°, *le troiſieme angle*; 3°, *le troiſieme côté*. (fig. 17).

SOLUTION.

Soient A & B les deux angles connus avec le côté AC oppoſé à l'angle B, & le côté AB eſt celui qu'on veut trouver. Pour cela dans l'équation $\frac{bfq}{r} + ag = \frac{fnp}{m}$ qui renferme toutes les données du Problême avec le ſinus a & le coſinus b du côté inconnu AB, il n'y a qu'à chercher l'une ou l'autre des quantités a & b traitée comme inconnue. Et pour ſimplifier le calcul autant qu'il ſera poſſible, on diviſera d'abord chaque membre de

l'équation par f, puis en mettant t pour la cotangente $\frac{g}{f}$ du côté AC, & s pour la cotangente $\frac{n}{m}$ de l'angle B, & faisant le sinus total égal à l'unité, l'équation deviendra $bq + at = ps$ ou $q\sqrt{rr - aa} = ps - at$, d'où l'on tire aisément en élevant tout au quarré, & résolvant l'équation du second degré

$$\text{sin AB ou } a = \frac{pst \pm q\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2 + q^2},$$

on trouveroit de même en éliminant a, & résolvant une semblable équation du second degré

$$\text{cos AB ou } b = \frac{pqs \pm t\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2 + q^2};$$

on aura donc le côté AB par le moyen de ces valeurs, au moyen desquelles il seroit aussi facile de trouver l'expression algébrique de la tangente du même côté AB. *C.Q.F.* 1°. *T.*

2°. Pour trouver l'angle C, je fais attention que l'analogie entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés donne $\text{sin C} = \frac{am}{f}$; donc pour avoir l'expression du sinus de cet angle en n'y employant que les données du problême, on n'aura qu'à multiplier le sinus a du côté AB par $\frac{m}{f}$, ce qui donnera cette expression

$$\text{sin C} = \frac{pst \pm q\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2 + q^2} \times \frac{f}{m}.$$ *C.Q.F.* 2°. *T.*

3°. Enfin pour avoir le troisieme côté BC, il est visible qu'il n'y a qu'à se servir de l'analogie ordinaire, ce qui donnera $\text{sin BC} = \frac{\text{sin AC} \times \text{sin A}}{\text{sin B}}$. *C. Q. F.* 3°. *T.*

PROBLEME VIII.

225. *Connoissant les trois côtés d'un triangle quelconque, trouver un angle quelconque du même triangle.*

SOLUTION.

Soit reprise l'équation $CX = \frac{gr - bd}{a}$ trouvée au Pro-

blême VI. seconde Partie. La construction de la figure donne $fX : CX :: MG : nG$; on aura donc aussi $c : \frac{gr - bd}{a} :: r : cos\,B = \frac{grr - bdr}{ac}$, & en substituant à chaque lettre sa valeur, on trouvera pour un angle quelconque B.

$cos\,B = \frac{cos\,AC \times RR - cos\,AB \times cos\,BC \times R}{sin\,AB \times sin\,BC}$; on trouveroit de même $cos\,A = \frac{cos\,BC \times RR - cos\,AC \times cos\,AB \times R}{sin\,AC \times sin\,AB}$, & $cos\,C = \frac{cos\,AB \times RR - cos\,AC \times cos\,BC \times R}{sin\,AC \times sin\,BC}$. *C. Q. F. T.*

PROBLEME IX.

226. *Connoissant les trois angles d'un triangle sphérique quelconque, trouver un côté quelconque.*

SOLUTION.

En suivant toujours l'analyse que nous offre la construction de la figure 17, il seroit aisé d'arriver à une équation qui renfermeroit le cosinus d'un côté quelconque, exprimé ou combiné avec les données du problême ; mais au triangle DEF (*fig.* 11.) dont toutes les parties sont suppléments de celles du triangle BAC, & dans lequel on connoît les trois côtés, on auroit $cos\,D = \frac{cos\,DF \times cos\,DE \times R - cos\,EF \times RR}{sin\,DF \times sin\,DE}$; donc puisque l'angle D est supplément du côté AB, & que les arcs suppléments l'un de l'autre ont le même sinus & le même cosinus, on aura par les sustitutions indiquées par la figure, $cos\,AB = \frac{cos\,B \times cos\,A \times R - cos\,C \times RR}{sin\,B \times sin\,A}$, & l'on trouveroit de même $cos\,AC = \frac{cos\,A \times cos\,C \times R - cos\,B \times RR}{sin\,C \times sin\,A}$, & $cos\,BC = \frac{cos\,B \times cos\,C \times R - cos\,A \times RR}{sin\,B \times sin\,C}$. *C. Q. F. T.*

PREMIER SCHOLIE.

227. Si l'on compare les ſolutions des problêmes VI & VII, telles que l'analyſe nous les a fait découvrir avec celles que nous avons démontrées ſyntétiquement dans le ſecond Chapitre, on ne peut s'empêcher d'être frappé de la différence prodigieuſe qui ſe trouve entre les unes & les autres; on ſeroit même tenté de croire qu'il y a quelque maladreſſe dans l'analyſe algébrique, vu la complication des expreſſions qu'elle nous fait découvrir. Cette différence mérite d'être examinée avec la plus grande attention, & peut nous faire découvrir des vérités intéreſſantes, qui pourroient avoir des applications utiles. Je remarque d'abord que lorſque je réduis le triangle BAC (*fig.* 15.) en deux triangles rectangles pour en trouver les parties; ſi c'eſt l'angle A que je cherche, en ſuppoſant les côtés AB, AC connus avec l'un des angles B oppoſés à l'un des côtés connus, les opérations indiquées ſur la table générale des triangles obliquangles me font trouver cet angle par portions, en me donnant la cotangente de la premiere partie BAD & le coſinus de la ſeconde partie CAD; tandis que l'analyſe algébrique ne ſuppoſe pas une telle diviſion de l'angle BAC, & qu'elle cherche à découvrir tout d'un coup le ſinus ou le coſinus de l'angle entier BAC. C'eſt donc de cette différente maniere de procéder à la ſolution du problême, que vient auſſi la différence des ſolutions qui n'eſt, dans le vrai, qu'une différence apparente. Pour m'en convaincre encore plus ſûrement, ſoit nommé x le ſinus de l'angle BAD; la formule *cot* premier ſeg. de l'angle = *tang* angle donné × *coſ* côté adj. donnera $r\sqrt{rr-xx}=btx$, en gardant les dénominations employées au problême VI. d'où l'on tire x ou *ſin* BAD $=\frac{r^3}{\sqrt{r^4+b^2t^2}}$, & par conſéquent

$cos\,BAD = \frac{btr}{\sqrt{r^4+b^2t^2}}$. La seconde formule du même article de la même table donne $cos\,CAD = \frac{atrr}{s\sqrt{r^4+b^2t^2}}$ & partant aussi $sin\ CAD = \frac{r\sqrt{r^4s+b^2t^2s^2-a^2t^2r^2}}{s\sqrt{r^4+b^2t^2}}$; donc au moyen de ces valeurs à cause que BAC = BAD $\pm$ CAD, il sera facile d'avoir le sinus de ce même angle tout entier par le moyen de la formule du n°. 23. $sin\ (A \pm B) = \frac{sin\,A \times cos\,B \pm sin\,B \times cos\,A}{R}$, en supposant que BAD = A & que CAD = B, d'où l'on tire sur le champ $p = \frac{r^3 \times atr \pm btr\sqrt{r^4s^2+b^2t^2s^2-a^2t^2r^2}}{s \times (r^4+b^2t^2)}$ qui est précisément la même que nous avons trouvé en résolvant directement l'équation du second degré du problême VI. On voit donc à présent comment ces deux solutions reviennent au même, quoique très-différentes en apparence. On voit de plus avec quelle facilité la Trigonométrie sphérique peut résoudre par deux analogies des équations du second degré qui présenteroient des radicaux très-compliqués.

Second Scholie pour les Triangles sphériques rectangles.

228. On peut encore remarquer une autre différence entre les solutions syntétiques & analytiques des Problêmes de Trigonométrie sphérique. Les premieres ne doivent la simplicité de leurs formules qu'à ce que l'on a commencé par les cas les plus simples, auxquels on a ramené les cas généraux plus composés. Dans les dernieres au contraire, on ne suppose la solution d'aucun cas particulier plus simple que le général. Ces cas particuliers sont tous renfermés dans la formule générale, & peuvent s'en déduire avec la plus grande facilité. Aussi rien de plus aisé que de tirer de ces formules toutes celles qui ont rapport aux triangles sphériques rectangles,

en faisant attention que le sinus d'un angle droit est égal au rayon, & que son cosinus est zéro. Par exemple de la formule du n° 214. . . . .

$Tang\ B = \frac{\sin A \times RR}{\sin AB \times \cot AC \pm \cos AB \times \cos A}$, en supposant l'angle A de 90°, on tire $tang\ B = \frac{tang\ AC \times R}{\sin AB}$, de même la formule du n°. 216,

$\cos BC = \frac{R \times \cos AB \times \cos AC \pm \cos A \times \sin AB \times \sin AC}{RR}$ donnera $\cos BC = \frac{\cos AB \times \cos AC}{R}$. Par les mêmes suppositions, la formule du n°. 220 donne . . . .

$tang\ AC = \frac{\sin AB \times tang\ B}{R}$ & $tang\ AB = \frac{\sin AC \times tang\ C}{R}$

& $tang\ BC = \frac{tang\ AB \times R}{\cos B}$. Les formules de l'art. 221, donneront $\cos B = \frac{\sin C \times \cos AC}{R}$, $\cos C = \frac{\sin B \times \cos AB}{R}$.

De la valeur de p trouvée au n°. 223, on tire, en supposant un angle droit $\sin B = \frac{(tang^2 BC - tang^2 AB) \times R}{\sin AB \times tang\ BC}$. La formule du cosinus dans la même supposition de l'angle B droit, se réduira d'abord à $q = \frac{abr^2t^2}{s^2b^2t^2}$, parce que le radical s'évanouit en comparaison de ce terme, ce qui donne pour un triangle dont B seroit droit, $R \times \cos A = tang\ AB \times \cot AC$; & si c'est l'angle A qui est droit, on aura $\cos B \times R = tang\ AB \times \cot BC$. Pareillement de la formule trouvée au second article du même n°.

$d = \frac{r^3bg \pm \sqrt{\&c.}}{r^2b^2 \times a^4n^2}$ à cause de $n = 0$, l'on tire tout de suite $d = \frac{rg}{b}$, ce qui donnera pour un triangle BAC rectangle en A, $\cos AC = \frac{\cos BC \times R}{\cos AB}$ & pour le sinus, $\sin AC = \frac{\sqrt{\cos^2 AB - \cos^2 BC}}{\cos AB}$. De même encore la pre-

miere formule du n°. 224 donne R × *sin* AB = *tang* AC × *cot* B, parce que le radical s'évanouit étant multiplié par $q = 0$. Dans la seconde formule au contraire, il n'y a que le radical qui demeure, & qui se réduit à cette équation $b = \frac{r\sqrt{t^2 - s^2}}{t}$ ou $cos\ AB = \frac{r \times \sqrt{tang^2\ AC - tang^2\ B}}{tang\ AC}$; enfin connoissant, outre l'angle droit, les deux angles sur l'hypoténuse, les formules du n°. 225 donneront celles-ci . . . $cos\ AB = \frac{cos\ C \times R}{sin\ B}$, $cos\ AC = \frac{cos\ B \times R}{sin\ C}$ & $cos\ BC \times R = cot\ B \times cot\ C$. D'où l'on voit qu'en jettant un coup d'œil sur toutes ces formules, il eût été facile d'arriver au Théorême de *Néper* par le moyen des formules algébriques, comme par les considérations syntétiques. Pour faire voir encore davantage la généralité de toutes ces formules, on pourroit en faire l'application aux différents problêmes de la Trigonométrie rectiligne. Les Commençants pourront s'exercer à ces sortes de recherches. Nous ajouterons encore ici quelques considérations sur les constructions expliquées aux numéros 204 & 205.

PROBLEME X.

229. Supposant que d'un angle quelconque d'un triangle sphérique quelconque BAC (*fig.* 21.) l'on ait abaissé une perpendiculaire sur le côté opposé prolongé s'il est nécessaire; *Trouver en sinus, cosinus, tangentes ou cotangentes.* 1°, *Les rapports des segments de la base aux angles adjacents.* 2°, *Les rapports des mêmes segments avec les côtés correspondants.* 3°, *Les rapports des segments de l'angle vertical aux côtés adjacents.* 4°, *Les rapports des segments du même angle aux angles sur la base.*

SOLUTION.

Imaginons que du point C l'on ait abaissé la perpendiculaire CP sur le côté AB prolongé s'il est nécessaire. Il est visible que les arcs AP & BP ainsi que les angles AGP, BGP mesurés par ces arcs seront les segments formés par la perpendiculaire CP. Il est pareillement évident que la moitié G′C de la corde G′Cg′ sera le sinus de cette même perpendiculaire; & par conséquent GC sera le cosinus de ce même arc. Cela posé; dans le triangle rectangle GHC on aura d'abord . . . .
R : CG ou *cos* CP : : *sin* AP : CH; & à cause des proportionnelles *r*G, *d*G, *l*H, CH; on a . . . .
cos A : R : : CH : *sin* AC; donc en multipliant ces deux proportions par ordre on aura cette autre proportion . . .
cos A : *cos* CP : : *sin* AP : *sin* AC; on trouveroit de même *cos* B : *cos* CP : : *sin* BP : *sin* BC, d'où l'on tire sur le champ *sin* AP : *sin* BP : : *sin* AC × *cos* A : *sin* BC × *cos* B : : *sin* B × *cos* A : *sin* A × *cos* B : : $\frac{sin\ B}{cos\ B}$: $\frac{sin\ A}{cos\ A}$: : *tang* B : *tang* A : : *cot* A : *cot* B; ce qui se trouve tout de suite, en substituant dans le second rapport *sin* B : *sin* A au lieu de *sin* AC : *sin* BC. D'où il suit que *les sinus des segments de la base sont entr'eux comme les cotangentes des angles adjacents. C. Q. F.* 1°, *T.* & *D.*

2°, A cause que l'angle GCH est complément de l'arc AP, & que pareillement l'angle GCX est complément de l'arc BP, le triangle GHC donnera
R : *cos* CP : : *cos* AP : GH = *cos* AC. Pareillement le triangle GCX donnera R : *cos* CP : : *cos* BP : GX = *cos* BC; donc puisque ces deux proportions ont le même premier rapport, on aura *cos* AP : *cos* BP : : *cos* AC : *cos* BC; c'est-à-dire, *que les cosinus des segments de la base sont comme ceux des côtés correspondants. C. Q. F.* 2°, *T.* & *D.*

On prouveroit de même qu'en abaissant la perpendiculaire Aδ sur la base BC on auroit *sin* Bδ : *sin* Cδ : : *cot* B : *cot* C & que *cos* Bδ : *cos* Cδ : : *cos* AB : *cos* AC.

3°,

3°, Supposons qu'en effet on ait abaissé la perpendiculaire Aδ, & que l'on considere actuellement les segments BAδ, CAδ de l'angle BAC. On a vu ci-devant (n°. 206.) que Rθ = Aδ; ce qui donne $\theta\zeta$ égal au cosinus de cet arc perpendiculaire Aδ. Cela posé, à cause des proportionnelles RG, ρG; $\theta\zeta$, Zζ, & parce que ρG est visiblement égal au cosinus de l'angle BAδ, on aura R : *cos* BAδ : : *cos* Aδ : Zζ; de plus à cause que ZG = *sin* B (n°. 205) & que l'angle ZGζ est égal au complément de AB, on aura *cos* AB : R : : Zζ : *sin* B; donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura . . . . *cos* AB : *cos* BAδ :: *cos* Aδ : *sin* B on trouveroit de même que *cos* AC : *cos* CAδ :: *cos* Aδ : *sin* C donc on aura aussi *cos* BAδ : *cos* CAδ : : *sin* B × *cos* AB : *sin* C × *cos* AC : : *sin* AC × *cos* AB : *sin* AB × *cos* AC : : $\frac{cos\,AB}{sin\,AB} : \frac{cos\,AC}{sin\,AC}$: : *cot* AB : *cot* AC; c'est-à-dire, que *les cosinus des segments de l'angle vertical sont comme les cotangentes des côtés adjacents.*

4°, De la proportion entre les sinus des côtés & les sinus des angles opposés dans les triangles rectangles AδB, AδC, on tire *sin* BAδ × *sin* Aδ = *sin* Bδ × *sin* B, & *sin* CAδ × *sin* Aδ = *sin* Cδ × *sin* C; on aura donc *sin* BAδ : *sin* CAδ : : *sin* Bδ × *sin* B : *sin* Cδ × *sin* C : : *cos* B : *cos* C, à cause que *sin* Bδ : *sin* Cδ : : *cot* B : *cot* C, commme on l'a démontré à la fin du second article : c'est-à-dire, *que les sinus des segments de l'angle vertical sont comme les cosinus des angles sur la base.* C. Q. F. 4°, T. & D.

SCHOLIE.

230. On voit donc comment on a pu trouver par l'analyse, soit algébrique soit géométrique, tous les Théorêmes nécessaires à la résolution des triangles rectangles ou obliquangles ; en appliquant l'une & l'autre aux constructions graphiques expliquées dans le Chapitre

précédent, on verra de plus qu'il y avoit encore plusieurs moyens de découvrir toutes ces vérités. Par exemple, on auroit pu arriver aux dernieres analogies, par la considération des sécantes intérieures $\nu\delta\omega\mu$, $\eta\delta\iota\varphi'$. De même, si l'on fait attention que les arcs $p\gamma$, $p\beta$ sont les mesures des segments ACP, BCP formés par l'arc perpendiculaire CP avec les côtés de l'angle C, on verra qu'on auroit également trouvé les dernieres analogies par le moyen des lignes $\gamma\Lambda$, $l'\lambda$; $\beta\Phi$, $f'\varphi$, considérées comme sécantes intérieures.

Si l'on suppose de plus que le triangle sphérique devienne un triangle rectiligne, il sera facile de reconnoître ce que deviennent les quatre analogies que nous avons trouvées. La premiere *sin* Bδ : *sin* Cδ : : *cot* B:*cot* C devient Bδ : Cδ : : *cot* B : *cot* C, c'est-à-dire, que dans un triangle rectiligne *les segments de la base formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle opposé sont comme les cotangentes des angles adjacents.* En effet, si l'on regarde Aδ comme sinus total, ces lignes seront les tangentes des segments de l'angle BAC, qui sont chacun complément des angles sur la base. La seconde analogie devient $\infty : \infty :: \infty : \infty$. La troisieme donne *les cosinus des segments de l'angle vertical, réciproquement comme les côtés opposés*; ce qui suit nécessairement de ce que les trois angles d'un triangle ne valent que deux droits. Enfin la derniere analogie devient une proportion dont les termes sont identiquement les mêmes deux à deux par la même raison, en comparant les antécédents & les conséquents entr'eux.

COROLLAIRE.

231. Si l'on suppose présentement que l'arc Aδ divise l'angle BAC en deux également, à cause que les angles AδB, AδC qui sont alors suppléments l'un de l'autre, ont un même sinus; on aura *sin* AδB : *sin* AB : : *sin* BAδ : *sin* Bδ & *sin* AδC : *sin* AC : : *sin* CAδ:

sin Cδ. D'où il suit que dans ce cas les sinus des segments sont comme les sinus des côtés qui leur sont opposés ; & par conséquent dans un triangle rectiligne ces segments seront entr'eux comme les côtés opposés, lorsque l'on aura divisé l'angle compris entre ces côtés en deux également.

SCHOLIE.

232. En jettant un coup d'œil sur toutes les formules que l'analyse algébrique nous a fait découvrir, on voit que pour trouver le logarithme de la grandeur inconnue, il s'agit presque toujours de chercher celui de la somme ou de la différence de deux quantités données. Comme nous avons déja indiqué la méthode de faire cette opération, il nous suffira d'en faire l'application à quelques exemples.

EXEMPLE PREMIER.

233. Supposons qu'au triangle BAC (*fig.* 11.) on connoît les deux côtés AB & BC avec l'angle B qu'ils comprennent ; savoir, le côté AB $= 41° \; 9'$, BC $= 71° \; 30'$ & ABC $= 27° \; 8'$; l'on demande l'angle en A par la formule (trouvée n°. 214) . . . .

$Tang\ A = \frac{sin\ B \times RR}{sin\ AB \times cot\ BC - cos\ AB \times cos\ B}$; nous prenons le signe $-$, parce que l'angle en A doit être aigu. Il est visible que toute la difficulté se réduit à trouver le logarithme du dénominateur, ce qui se fera aisément en regardant *sin* AB $\times$ *cot* BC comme un angle, & *cos* AB $\times$ *cos* B comme un autre angle, puis cherchant le sinus de leur différence par la formule $sin\ A - sin\ B = 2cos\ (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times sin\ (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$ (n°. 97).



Opération par Logarithmes.

9.818247 = *log. sin* AB.	9.948331 = *log. cos* ($\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B).
9.524520 = *log. cot* BC.	9.403790 = *log. sin* ($\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B).
9.342767 = *log. sin* 12° 43′ 20″ = B.	0.301030 = *log. de* 2.
9.876789 = *log. cos* AB.	19.653151 · *log. à soustraire.*
9.949364 = *log. cos* B.	de 29.659025 = *log. sin* B × RR.
9.826153 = *log. sin* 42° 4′ 35″ = A.	10.005874 = *log. tang* 45° 23′ 14″.

Exemple II.

234. Supposant les mêmes données que dans l'exemple précédent, il faut trouver le 3e côté AC par la formule $cos\,AC = \frac{cos\,B \times sin\,AB \times sin\,BC + cos\,AB \times cos\,BC \times R}{RR}$. Je regarde cette quantité comme l'expression d'un sinus égal à la somme des sinus de deux angles, & je me sers de la formule $sin\,A + sin\,B = sin\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Cela posé, l'opération n'a plus aucune difficulté, & s'achevera comme il suit.

9.949364 = *log. cos* B.	$\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B = 23° 46′ 44″.
9.818247 = *log. sin* AB.	*comp.* ($\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B) = 80 2′ 39″.
9.976957 = *log. sin* BC.	9.605529 = *log. sin* ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B).
9.744568 = *log. sin* 33° 44′ 5″ = A.	9.993410 = *log. cot* ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B).
9.876789 = *log. cos* AB.	0.301030 = *log. de* 2.
9.501476 = *log. cos* BC.	9.899969 = *log. cos* 37° 24′ 54″.
9.378265 = *log. sin* 13° 49′ 23″ = B.	

Exemple III.

235. Supposons présentement que l'on connoît les trois côtés AB, AC & BC du triangle BAC : savoir, AB = 41° 9′; AC = 52° 35′ 6″ & BC = 71° 50′, il s'agit de trouver un angle quelconque de ce triangle; l'angle A, par exemple, en se servant de la formule ... $cos\,A = \frac{cos\,BC \times RR - cos\,AC \times cos\,AB \times R}{sin\,AB \times sin\,BC}$. Cette expression se construira par la formule $sin\,A - sin\,B$ du no. 93:

le reste de l'opération s'achevera comme on le voit ici.

9.899969 = *log. cos* AC.
9.876789 = *log. cos* AB.

9.776758 = *log. sin* 36° 43' 56" = A.
cos BC = 18° 30' 0" = B.

A + B = 55° 13' 56" *donc* $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B = 27° 36' 58".
A — B = 18° 13' 56" $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B = 9° 6' 58".

comp. Arit. sin AB = 0.181753.
comp. Arit. sin BC = 0.623043.
logarith. de 2 = 0.301030.
log. cos ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) = 9.947469.
log. sin ($\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$B) = 9.199851.

9.653146 *log cos* 63° 15' 39" = *cos* A.

236. Puisque les problêmes VI & VII (des n°s 223 &224) nous ont fait tomber dans des équations du second degré, on voit qu'il peut arriver dans certaines équations que l'on soit obligé de résoudre des équations de cette nature ; & comme d'ailleurs tous les calculs d'Astronomie pratique se font par les Logarithmes, il ne sera pas inutile d'indiquer ici la maniere de trouver ces solutions par les Tables des Sinus. C'est par quoi nous ajouterons encore ici les deux Problêmes suivants.

PROBLEME.

237. *Construire par les Tables des Sinus les racines de l'équation* $x^2 \pm 2ax = bb$.

SOLUTION.

D'un point quelconque C avec le rayon CA = *a* (*fig.* 24), on décrira un cercle ADB*d* ; à l'extrémité du rayon CA, l'on élevera AL perpendiculaire à ce même rayon, & qui soit égale à la quantité *b*. Enfin par le centre C & le point L, on ménera la ligne LDC*d* terminée à la circonférence en *d*. On sait que les parties LD, L*d* seront les racines de l'équation, comme cela se démontre dans l'application de l'Algébre à la Géométrie ; ce qui est d'ailleurs facile à reconnoître, puisque la tangente AL

& la ſécante Ld donneront Ld : LA : : LA : LD, ou algébriquement $a+\sqrt{aa+bb} : b :: b :$ LD (x). D'où l'on tire $ax+x\sqrt{aa+bb}=bb$, ou $x\sqrt{aa+bb}=bb-ax$; & en élevant tout au quarré effaçant ce qui ſe détruit, & diviſant le reſte par bb; $x^2+2ax=bb$.

Cela poſé, pour ramener cette conſtruction aux Logarithmes des Tables, ſoit encore élevée la ligne droite FLf perpendiculaire à l'extrémité de AL, & terminée en F, f aux prolongements des cordes AD, Ad; enfin ſoient encore tirées les cordes BD, Bd. Tout ceci bien conçu, il eſt aiſé de voir que dans le triangle rectangle CAL l'angle ACL ſe déterminera par cette analogie : CA (a) : AL : (b) : : r : *tang* ACL. Enſuite à cauſe des triangles ſemblables BDA, ALF on aura BD : DA : : AL : LF = LD (x). Mais l'angle ABD eſt évidemment la moitié de l'angle ACL qu'on vient de trouver, on aura donc R : *tang* $\frac{1}{2}$ A CL : : AL (b) : LF ou LD (x). Donc on aura la valeur de x par les Logarithmes, au moyen des deux proportions que l'on vient de voir. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°, Si l'on nomme Ld, x, on trouvera que la même proportion donne l'équation $x^2-2ax=bb$. Dans ce cas, il faut faire a : b : : le rayon eſt à la tangente d'un angle, que cette regle de Trois fera trouver. Enſuite à cauſe des triangles rectangles ſemblables BdA, ALf on aura Bd : dA : : AL : Lf; on a auſſi Bd : dA : : Le rayon eſt à la cotangente de la moitié de l'angle BCd=ACL; donc on aura encore le rayon eſt à la cotangente de la moitié de l'angle trouvé par notre derniere proportion, comme la quantité b eſt à la ligne Af qui ſera la racine poſitive de l'équation $xx-2ax=bb$. *C. Q. F.* 2°, *T.*

PROBLÈME.

238. *Conſtruire par les Tables des Sinus les racines de l'équation* $x^2 \pm 2ax + bb = 0$ (fig. 25).

SOLUTION.

A l'extrémité du rayon CA $= a$ soit élevée une perpendiculaire AL $= b$; & par L soit menée la ligne LFf parallele à AB, laquelle coupera le cercle construit sur AB en deux points F & f, ou même ne le touchera qu'en un seul point, si le Problême est possible; & donnera les racines LF, Lf qui seront celles de l'équation $x^2 \pm 2ax + bb = 0$. Car nommant FL, x; à cause de la tangente AL & de la sécante Lf, on aura Lf $(a + \sqrt{aa - bb})$: AL (b) : : AL (b) : LF (x). D'où l'on tire aisément par le produit des extrêmes & des moyens $x^2 + 2ax + bb = 0$; on auroit trouvé pareillement $x^2 - 2ax + bb = 0$, si l'on eût nommé Lf, x. Cela posé, si l'on tire encore les lignes AF, Af, FB, FC, FD, fd, on aura d'abord au triangle rectangle CDF, CF : FD ou $a : b$: : le rayon est au sinus de l'angle FCD; ensuite à cause des triangles semblables BFA, FDA, on aura BF : FA : : FD : DA; mais l'angle en B est évidemment la moitié de l'angle au centre ACF, & l'on aura BF : FA : : R : *tang* $\frac{1}{2}$ FCA. Donc aussi R : *tang* $\frac{1}{2}$ FCA : : FD (b) : AD (x). D'où il suit que l'on connoîtra AD ou x, puisque les trois premiers termes de cette proportion sont connus.

2°, Si l'on nomme Lf, x, on aura encore à cause des triangles semblables AFB; fdA; AF : BF : : fd : dA $=$ Lf ou r : *cotang* $\frac{1}{2}$ FCA : : $b : x$. *C. Q. F. T.*

239. On trouve quelquefois dans l'Astronomie des Problêmes qui conduisent à des équations du troisieme degré, & particuliérement dans les calculs des mouvements des Cometes dans un orbe parabolique, c'est pourquoi on sera bien aise de voir ici comment on peut résoudre ces sortes d'équations par les Table des Sinus & de leurs Logarithmes. Avant de donner ces solutions, il est bon de se rappeller en peu de mots ce qui a rapport

à ces équations en général. Quant à la démonstration de ces différents articles, il faudra avoir recours à ce que M. CLAIRAUT a donné sur cette matiere dans ses Eléments d'Algebre.

Nous supposerons donc comme des vérités démontrées dans tous les éléments d'Algebre:

1°, Que toute équation du troisieme degré peut se réduire à la forme $x^3 \pm px \pm q = 0$, dans laquelle on a fait évanouir le second terme.

2°, Que des racines de l'équation $x^3 + px \pm q = 0$, il y en a nécessairement deux qui sont imaginaires & une réelle.

3°, Que l'équation $x^3 - px \pm q = 0$, on aura nécessairement deux racines imaginaires toutes les fois que $\frac{1}{27} p^3$ sera moindre que $\frac{1}{4} qq$.

4°, Qu'au contraire la même équation aura ses trois racines réelles toutes les fois que $\frac{1}{27} p^3$ toujours négatif sera plus grand que $\frac{1}{4} qq$; ce qui constitue le cas que l'on a nommé *cas irréductible*.

Quoique ces considérations ne soient pas absolument nécessaires pour comprendre les solutions que nous allons donner, & qui en sont indépendantes; néanmoins elles serviront à faire connoître que ces mêmes solutions renferment tous les cas possibles des équations du troisieme degré, en commençant d'abord par les réduire à n'avoir point de second terme, comme cela se pratique aisément par les transformations ordinaires.

PROBLEME I.

240. *Trouver les trois racines d'une équation du troisieme degré de la forme* $x^3 - px \pm q = 0$, *en supposant* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$; *c'est-à-dire, dans le cas irréductible.*

SOLUTION.

On prendra l'équation $4x^3 - 3r^2 x \pm ry^2 = 0$, dans

laquelle on ſuppoſe r plus grand que y, afin d'avoir $\frac{1}{27} p^3$ plus grand que $\frac{1}{4} q^2$, & qui par le moyen de l'indéterminée y pourra repréſenter toutes les équations du troiſieme degré qui appartiendront au cas irréductible. Cela poſé, ſi le dernier terme a le ſigne $+$, on fera $y = \mathit{ſin}\, A$, & la circonférence du cercle $= C$, ce qui donnera pour les racines de l'équation :

$$x = \mathit{ſin} \frac{A}{3}. \; x = \mathit{ſin} \frac{A+C}{3}, \; x = \mathit{ſin} \frac{A+2C}{3}.$$

Si le dernier terme de l'équation a le ſigne $-$, on fera $y = \mathit{coſ} A$, & les racines de l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$ ſeront $x = \mathit{coſ} \frac{A}{3}$; $x = \mathit{coſ} \frac{A+C}{3}$; $x = \mathit{coſ} \frac{A+2C}{3}$. La démonſtration de cette pratique ſe déduit ſur le champ des formules générales démontrées au n°. 54 & 55 ſur les ſinus & coſinus des arcs multiples. *C. Q. F. D.*

PROBLEME II.

241. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - px \mp q$ *dans laquelle on ſuppoſe* $\frac{1}{27} p^3$ *plus petit que* $\frac{1}{4} qq$, *c'eſt-à-dire, lorſque cette équation aura deux racines imaginaires.*

SOLUTION.

On prendra comme ci-devant l'équation $4x^3 - 3r^2x \mp r^2y$, dans laquelle on ſuppoſera $r < y$; afin d'avoir $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Et d'abord ſi l'on ſuppoſe que le dernier terme ait le ſigne $-$, on fera $y = \mathit{coſécante}\ 2A$, laquelle deviendra néceſſairement connue toutes les fois que y ſera déterminée. Enſuite on cherchera un angle B, tel que l'on ait $\mathit{cot}^3 B = r^2 \mathit{cot} A$, & la valeur de x ſera *coſec* 2B, Si le dernier terme a le ſigne $+$, alors il faudra regarder y comme la coſécante d'un angle obtus, & le problême ſe réſolvera de la même maniere. *C. Q. F. T.*

PROBLEME III.

242. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 \pm px \mp q = 0$ *laquelle a nécessairement deux racines imaginaires, à cause que* $\frac{1}{27}p^3$ *sera nécessairement positif.*

SOLUTION.

On prendra toujours l'équation $4x^3 + 3r^2x \mp r^2y = 0$ dans laquelle on fera $y =$ *cotang* 2A, & l'on cherchera un angle B, tel que l'on ait *cotang* ^{3} B $= r^2$. *cotang* A. La valeur de l'inconnue sera $x =$ *cotang* 2B. C. Q. *F. T.*

Démonstration des deux dernieres Solutions.

243. Soit que r soit plus grande ou plus petite que y, il est toujours vrai de dire que l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$, est la même que celle-ci $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2 (y + \sqrt{y^2 - r^2})$ comme on va le demontrer, d'où il suit que la valeur d'x en y tirée de la seconde, résolvera la premiere équation : tout se réduit donc à prouver l'identité de ces deux expressions. Pour cela, je remarque d'abord que par les formules du n°. 29, on a essentiellement $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$.

Cela posé, supposons pour un instant que l'on ait $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2 (y + \sqrt{y^2 - r^2})$ en faisant le cube indiqué, on aura $4x^3 - 3r^2x - r^2y + (4x^2 - r^2) \sqrt{x^2 - r^2} = -r^2 \sqrt{y^2 - r^2}$ dans laquelle je retrouve les termes $4x^3 - 3r^2x - r^2y$ que je sais déja être égaux à zéro. Ainsi tout se réduit à prouver que $\overline{4x^2 - r^2} \times \sqrt{x^2 - r^2} = -r^2 \sqrt{y^2 - r^2}$. Pour cela, j'éleve tout au quarré, & je trouve $16x^6 - 24r^2x^4 + 9r^4x - r^6 = r^4y^2 - r^6$, ou ce qui revient au même $16x^6 - 24r^2x^4 + 9r^4x^2 = r^4y^2$, laquelle est précisément le quarré de l'équation $4x^3 - 3r^2x = r^2y$. D'où suit la

vérité de ce qu'il falloit prouver. Mais si l'on suppose r plus petit que y comme nous l'avons fait, & $y =$ *cosécante* de 2A, on aura $\sqrt{y^2 - r^2} =$ *cotang* 2A. Pareillement si $x =$ *cosec* 2B; $\sqrt{x^2 - r^2}$ sera *cotang* 2B. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation ... $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2(y + \sqrt{y^2 - r^2})$ on aura cette nouvelle équation (*cosec* 2B + *cotang* 2B)^3 = r^2 (*cosec* 2A + *cot* 2A). Et à cause que par la formule du n°. 89 on a *cosec* 2A + *cot* 2A = *cotang* A; on aura par cette substitution dans chaque membre de la derniere équation cot^3 B $= r^2$ *cot* A. D'où il est aisé de trouver *cot* B, lorsque A est connu, & par conséquent d'avoir la valeur de x que nous avons fait = *cosec* 2B. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°, L'on prouvera de même que l'équation $4x^3 + 3r^2x - r^2y = 0$ est identiquement la même que $(x + \sqrt{x^2 + r^2})^3 = r^2(y + \sqrt{y^2 + r^2})$. Et supposant, comme nous l'avons fait, $y =$ *cotang* 2A & $x =$ *cotang* 2B, elle deviendra (*cotang* 2B + *cosécante* 2B)^3 $= r^2$ (*cotang* 2A + *cosec* 2A); & en dernier lieu cot^3 B $= r^2$ *cot* A, d'où il sera facile d'avoir l'arc désigné par B par la valeur de A, & par conséquent *cot* 2B qui est la valeur de l'inconnue x dans l'équation. *C. Q. F.* 2°, *D.*

Pour faire encore mieux sentir l'avantage de ces solutions, nous en ferons tout de suite l'application à des exemples particuliers.

Exemple I.

244. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - 3x - 1 = 0$, *laquelle doit avoir ses trois racines réelles, à cause que* $\frac{1}{27}p^3$ *est négatif & plus grand que* $\frac{1}{4}qq$.

Solution.

Pour comparer cette équation avec l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$, je commence par diviser tous les

termes de cette derniere par 4, & je trouve $x^3 - \frac{3}{4} r^3 x -$ $\frac{1}{4} r^2 y = 0$, qui donne $\frac{3}{4} r^2 = 3$, d'où l'on tire $r = 2$; & par conséquent $y = 1$.

A cause que le dernier terme est négatif, il faudra, suivant ce que nous avons dit au premier Problême n°. 240, faire $y = cos\,A$; & parce que ce cosinus est la moitié du sinus total, il faut qu'il soit le sinus d'un angle de 30°, donc on aura $A = 60°$. Par conséquent les valeurs de x seront $cos\ 20°$, $cos\ 140°$, $cos\ 260°$, ou $x = sin\ 70°$, $x = -sin\ 50°$, $x = -sin\ 10°$ pour un rayon qui seroit exprimé par 2. C'est à-dire, que les valeurs réelles de x sont doubles des sinus des Tables qui répondent aux angles trouvés.

EXEMPLE II.

245. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - x - 6 = 0$, *laquelle doit avoir nécessairement deux racines imaginaires, à cause que* $\frac{1}{27} p^3$ *est plus petit que* $\frac{1}{4} q^2$.

SOLUTION.

Je compare cette équation avec l'équation $4x^3 - 3r^2 x - r^2 y = 0$; après avoir divisé tous les termes de cette derniere par 4, & je trouve $\frac{3}{4} r^2 = 1$, ce qui me donne $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$, & $y = 18$ que je dois faire égal à $cosec\ 2A$. Pour trouver cet angle dans les Tables, je fais d'abord cette proportion:

$\frac{2}{\sqrt{3}} : 18 ::$ le sinus total des Tables qui est $1 : 9\sqrt{3}$ qui est l'expression d'une cosécante. Ensuite, parce que l'on a cosécante $A = \frac{rr}{sin\ A}$, j'aurai $sin\ 2A = \frac{rr}{cosec\ 2A}$; ce qui se trouvera par les Logarithmes, en ôtant du double du Logarithme du sinus total celui de $9\sqrt{3}$, & l'on trouvera $sin\ 2A = 0,807196$ ou $8,807196$ selon la caractéristique des Tables. Ce nombre répond à $3° 40' 40''$; donc $A = 1° 50' 20''$.

Préſentement pour avoir l'angle B qui doit déterminer la valeur de x par la coſécante du double de cet angle : au nombre 11,493417 j'ajoute le double du Logarithme du ſinus total, & j'en prends le tiers, ce qui me donne $cot\, B = cot\, 17^\circ 37' 50''$; & partant $B = 17^\circ 37' 50''$ dont la coſécante du double, c'eſt-à-dire la ſécante de $54^\circ 44' 20''$ multipliée par $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ſera la racine demandée de l'équation propoſée.

Exemple III.

246. *Trouver les racines de l'équation* $25x^3 + 75x - 46 = 0$ *qui a néceſſairement deux racines imaginaires, à cauſe que le ſecond terme a le ſigne* $+$.

Solution.

Pour comparer cette équation avec l'équation $4x^3 + 3r^2x - r^2y = 0$, je commence par diviſer tous les termes de cette derniere par 4, & ceux de la propoſée par 25 ; ce qui me donne ces deux nouvelles équations $x^3 + \frac{3}{4}r^2x - \frac{1}{4}r^2y = 0$, & $x^3 + 3x - \frac{46}{25} = 0$, d'où je tire par la comparaiſon des termes correſpondants $r = 2$ & $y = \frac{46}{25}$. Pour découvrir quel eſt l'angle A tel que $\frac{46}{25}$, ſoit la cotangente de ſon double, je fais cette proportion: Le rayon 2 que je viens de trouver eſt à $\frac{46}{25}$: : le ſinus total des Tables 1,000000 eſt à la cotangente d'un angle, qui eſt celui que nous avons nommé 2A dans le troiſieme problême. Faiſant l'opération par les Logarithmes, je trouve 10,036212 qui répond à la tangente de $47^\circ 23' 10''$; par conſéquent $A = 23^\circ 41' 35''$; avec cette valeur de A on trouvera comme au problême précédent $B = 37^\circ 13' 54''$, & la tangente de complément du double de cet angle étant multipliée par 2, à cauſe que nous avons trouvé $r = 2$, ſera la racine de cette équation. *C. Q. F. T.*

OBSERVATION.

Nous remarquerons que cette ſolution des équations du 3e degré par le cercle, donne auſſi néceſſairement celles des équations du 4e degré, puiſque les équations du 4e degré ſe réduiſent à une du troiſieme ; comme cela ſe démontre dans tous les Traités d'Algebre. On obſervera de plus qu'il ſeroit facile de trouver dans chaque degré des équations qui ſe réſolveroient comme celles-ci par le cercle ; mais elles ne pourroient pas réſoudre de la même maniere tous les cas de ces équations. Ce que nous avons dit ici, ſuffit pour l'uſage ordinaire.

CHAPITRE CINQUIEME.

Des Analogies différentielles des Triangles ſphériques & rectilignes quelconques.

PREMIERE SECTION.

LEMME PREMIER.

247. *La différentielle d'un arc (fig. 26) eſt à celle du ſinus du même arc, comme le rayon eſt au coſinus du même arc.*

DÉMONSTRATION.

Soit un arc quelconque AM que je nommerai z dont le ſinus ſoit MP que je déſignerai par s, le coſinus CP que je nommerai u, la tangente AT $= t$ & la ſécante CT $= y$. Il faut prouver que $dz : ds :: r : u$.

Supposons que l'arc AM soit devenu Am, & soient tirées les lignes Cmt, mp; soit de plus décrit du centre C avec le rayon CT l'arc TS. Enfin par le point M soit menée Mr parallele à CA : il est visible par cette construction que l'on aura $Mm = dz$, $mr = ds$, $Mr = -du$ (à cause que l'arc AM augmentant, son cosinus diminue), & $Tt = dt$, $tS = dy$. Cela posé, à cause des triangles semblables mrM, CPM, on aura CM (r) : CP (u) : : Mm (dz) : mr (ds). *C. Q. F. D.*

LEMME SECOND.

248. *La différentielle d'un arc est à celle de sa tangente, comme le quarré du rayon est au quarré de la sécante;* c'est-à-dire, que l'on aura $dz : dt :: r^2 : yy$. (*fig.* 26).

DÉMONSTRATION.

A cause des secteurs semblables CMm, CTS on aura CM (r) : CT (y) : : Mm (dz) : $TS = \frac{ydz}{r}$. De plus les triangles rectangles CAT, TSt sont aussi semblables, puisque, lorsque les lignes CT, Ct sont prêtes à coïncider, l'angle en t ne differe point de l'angle en T. Ainsi l'on aura CA : CT : : ST : Tt, ou $r : y :: \frac{ydz}{r} : dt$, d'où l'on tire sur le champ $dz : dt :: rr : yy$. *C. Q. F. D.*

LEMME TROISIEME.

249. *La différentielle d'un arc est à celle de sa sécante, comme le quarré du rayon est au produit de la sécante par la tangente*, c'est-à-dire, que l'on aura $dz : dy :: r^2 : ty$.

DÉMONSTRATION.

Il est visible que St est la différentielle de la sécante; mais nous avons déja trouvé $ST = \frac{ydz}{r}$; donc en comparant encore les côtés homologues des triangles sem-

blables CAT, TSt, on aura CA : AT : : ST : St, ou $r : t :: \frac{ydz}{r} : dy$, d'où l'on déduit sur le champ $dz : dy :: rr : ty$. *C.Q.F.D.*

COROLLAIRE.

250. Donc en réunissant ces différentes expressions, on aura pour la différentielle ou la fluxion d'un arc quelconque z, $dz = \frac{rds}{u} = -\frac{rdu}{s}$ (en se servant de la fluxion du cosinus) $= \frac{rrdt}{yy} = \frac{udt}{y} = \frac{r^2dy}{ty} = \frac{rudt}{ys}$. On trouveroit avec la même facilité des formules pour les cotangentes ou les cosécantes; celles-ci nous suffiront pour tout ce que nous aurons à démontrer dans ce Chapitre.

SCHOLIE.

251. On auroit pu démontrer ces différentes analogies par les formules que nous avons exposées au premier Chapitre. Par exemple, le Lemme premier auroit pu se conclure immédiatement du num. 86. $sin(A+B) = sin\,A \times cos\,B + sin\,B \times cos\,A$. Car on a $d\,sin\,AM = sin\,(AM + mM) - sin\,AM$. Mais pour un arc évanouissant dz, le cosinus est égal au rayon ou à l'unité, & le sinus de ce même arc dz, se confond avec cet arc lui-même. On aura donc $sin\,(z + dz) = sin\,z + \frac{dz\,cos\,z}{r} = s + \frac{udz}{r}$; donc ds ou $sin\,(z+dz) - s = s + \frac{udz}{r} - s = \frac{udz}{r}$. Les autres formules auroient pu se déduire avec la même facilité des formules expliquées au premier Chapitre.

LEMME IV.

252. *Si des trois angles d'un triangle sphérique quelconque* BAC *comme poles* (fig. 11) *on décrit sur la surface de la sphere un nouveau triangle sphérique* DEF; *je dis*

dis que les variations des angles D, E, F *de ce nouveau triangle seront respectivement égales à celles des côtés opposés* AB, AC *&* BC *du triangle* BAC ; *& les variations des côtés* DE, EF & DF *du même triangle seront les mêmes que celles des angles opposés du triangle* BAC, *& réciproquement pour les variations des parties du triangle* BAC *à l'égard des parties du triangle* DEF.

Démonstration.

Cette proposition est une suite évidente de ce que l'on a démontré au n°. 131, & de ce que les angles supplémens l'un de l'autre ont nécessairement le même sinus, même cosinus, même tangente, cotangente, sécante & cosécante. *C. Q. F. D.*

II. SECTION.

Des variations d'un Triangle sphérique ou rectiligne quelconque, dans lequel on suppose un angle constant, ainsi que le côté qui lui est adjacent.

Théoreme I.

253. *Si dans un triangle sphérique quelconque* BAC (fig. 27) *on suppose un angle quelconque comme* A, *constant avec le côté* AC *adjacent à cet angle ; on aura toujours cette analogie : La différentielle de l'autre côté adjacent à l'angle constant est à celle du côté opposé, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté constant* ; c'est-à-dire, suivant nos suppositions pour la figure 27 que . . . . . $d\,AB : d\,BC :: R : cos B$.

Démonstration.

Supposant que le côté AB soit devenu Aβ, c'est-à-dire, qu'il soit augmenté de la petite quantité Bβ ; si l'on tire Cβ, & que sur ce côté on prenne Cb = CB en décrivant du pole C le petit arc de cercle Bb ; $b\beta$ sera l'aug-

mentation ou la fluxion du côté CB ; & le petit triangle B$b\beta$ sera rectangle en b, & pourra être regardé comme rectiligne, à cause de la petitesse de ses côtés ; ainsi les côtés de ce petit triangle seront comme les sinus des angles opposés. Mais l'angle en β est sensiblement égal à l'angle B, & par conséquent l'angle β B b sera complément de ce même angle ; on aura donc Bβ : $b\beta$: : R : *cos* B, ou d AB : d BC : : R : *cos* B. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

254. De cette proportion & des formules démontrées au Chapitre précédent, on déduira aisément les analogies suivantes. Le n°. 225 donne en substituant à *cos* B sa valeur d AB : d BC : : *sin* AB × *sin* BC : R × *cos* AC — *cos* AB × *cos* BC. & (n°. 221) : : R : $\frac{cos\ AC \times sin\ A \times sin\ C}{RR}$ — $\frac{cos\ A \times cos\ C}{R}$. Si l'angle en A est de 90°, : : RR : *cos* AC × *sin* C : : *tang* BC : *tang* AB (n°. 228).

Corollaire II.

255. Si le triangle est rectiligne, on aura toujours dans les mêmes suppositions d AB : d BC : : R : *cos* B.

Theoreme II.

256. *Supposant les mêmes choses qu'au Théorême précédent, je dis que la différentielle du côté variable adjacent à l'angle constant est à celle de l'angle opposé à ce côté, comme le sinus du côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant ;* c'est-à-dire, en appliquant cette analogie à la figure 27 ; que l'on aura d AB : d C : : *sin* BC : *sin* B.

Démonstration.

Soient prolongés les côtés CB, Cb, jusqu'à ce qu'ils ayent chacun 90°. Il est clair que l'arc Ff sera la mesure de la variation de l'angle C. Cela posé, à cause que les petits arcs Ff, Bb sont d'un même nombre de degrés,

on aura $Ff : Bb :: R : \sin BC$; d'ailleurs à cause du triangle $Bb\beta$. $Bb : B\beta :: \sin B : R$; donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $Ff : B\beta :: \sin B : \sin BC$ ou $dC : dAB :: \sin B : \sin BC$, & *invertendo* $dAB : dC :: \sin BC : \sin B$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

257. Si à la place de *sin* B & de *sin* BC, on substitue à ces quantités leurs différentes valeurs déduites de la proportion entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés, on trouvera cette suite de rapports égaux; $dAB : dC :: \sin^2 BC : \sin AC \times \sin A :: \sin AC \times \sin A : \sin^2 B :: \sin BC \times \sin AB : \sin C \times \sin AC :: \sin A \times \sin^2 B :: \sin AC \times \sin^2 C$.

COROLLAIRE II.

258. Si le triangle est rectiligne, alors le sinus du côté BC se confond avec le côté BC lui-même; ainsi le Théorême devient $dAB : dC :: BC : \sin B$.

THÉOREME III.

259. *La différentielle du côté opposé à l'angle constant est à celle de l'angle variable adjacent au côté constant, comme le sinus de ce côté multiplié par le cosinus de l'autre angle, est au produit du sinus de ce même autre angle par le rayon; c'est-à-dire, que l'on aura* $dBC : dC :: \sin BC \times \cos B : R \times \sin B :: \sin BC : \text{tang}\, B$.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a (n°. 253) $dBC : dAB :: \cos B : R$, & que par le Théorême dernier on a $dAB : dC :: \sin BC : \sin B$, on aura en multipliant par ordre $dBC : dC :: \sin BC \times \cos B : R \times \sin B :: \sin BC : \text{tang}\, B$. C. Q. *F. D.*

COROLLAIRE I.

260. Si l'on substitue à *sin* BC sa valeur $\frac{\sin AC \times \sin A}{\sin B}$

on aura cette nouvelle analogie dBC : dC : : sin A × sin AC : tang B × sin B : : sin^2 BC × cot AC — sin BC × cos BC × cos C : R² × sin C.

COROLLAIRE II.

261. Si le triangle eſt rectiligne, les mêmes ſuppoſitions donneront dBC : dC : : BC : tang B. Car le ſinus de BC devient le côté BC lui-même.

THÉOREME IV.

262. *Suppoſant toujours les mêmes conditions, je dis que la différentielle du côté adjacent à l'angle conſtant, eſt à la différentielle de l'angle adjacent à ce côté; comme la tangente du côté oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté conſtant*; c'eſt-à-dire, que l'on aura dAB : dB : : tang BC : sin B.

DÉMONSTRATION.

Suivant les ſuppoſitions du Théorême, dans le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties ſont, par conſtruction, ſuppléments de celles du triangle BAC; l'angle en E & le côté DE qui lui eſt adjacent, feront conſtants. De plus par le Lemme IV de ce chapitre, les variations de l'angle D & du côté DE feront reſpectivement les mêmes que celles du côté AB & de l'angle B du triangle BAC; mais par le dernier Théorême on a dDF : dD : : sin DF : tang F; donc parce que les angles ſuppléments l'un de l'autre ont même tangente & même ſinus, on aura, en ſubſtituant à ces quantités, leurs correſpondantes au triangle BAC, & faiſant un *invertendo* dAB : dB : : tang BC : sin B. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

263. Puiſque l'on a dAB : dB : : tang BC : sin B, & qu'on a auſſi (n°. 256) dC : dAB : : sin B : sin BC, on trouvera, en multipliant ces deux proportions par ordre dB : dC : : sin BC : tang BC : : cos BC : R : :

$\cos A \times R + \cos B \times \cos C : \sin B \times \sin C$ (n°. 263) : : $\cos A \times \sin AC \times \sin AB + \cos AC \times \sin AB \times R : R^3$, en mettant pour *cosin* BC sa valeur (n°. 216).

COROLLAIRE II.

264. Si le triangle est rectiligne, alors *sin* BC = *tang* BC; d'où il suit que les variations de chacun des deux angles sont égales; ce qui doit nécessairement arriver, puisque dans un triangle rectiligne quelconque la somme des trois angles est toujours une quantité constante; & que d'ailleurs nous avons supposé un angle constant.

III. SECTION.

Des variations d'un triangle sphérique ou rectiligne quelconque dans lequel on suppose un angle constant avec le côté qui lui est opposé.

THÉOREME V.

265. *SUPPOSANT au triangle* BAC (fig. 28) *l'angle en* A *constant avec le côté* BC *qui lui est opposé; on aura toujours la différentielle d'un angle quelconque à celle du côté opposé, comme la tangente de cet angle est à la tangente du côté opposé;* c'est-à-dire, que l'on aura ces deux analogies: $dB : dAC :: \tan B : \tan AC$ ou $dC : dAB :: \tan C : \tan AB$.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle en A du triangle BAC avec le côté BC qui lui est opposé demeurent constants, & que la proportion entre les sinus des angles & ceux des côtés qui leur sont opposés, donne $\sin C = \frac{\sin A}{\sin BC} \times \sin AB$; & $\sin B = \frac{\sin A}{\sin BC} \times \sin AC$; il est clair que les variations de *sin* C & *sin* B seront comme celles des sinus des côtés AB, AC qui leur sont opposés; ce qui donnera $d \sin C = d \sin AB$. Donc (n°. 250) la variation de l'arc qui mesure

l'angle C, sera à celle de l'arc AB:: $\frac{d.\,sin\,C}{cos\,C} : \frac{d.\,sin\,AB}{cos\,AB}$; ou, ce qui revient au même, $d\,C : d\,AB :: \frac{d.\,sin\,C}{cos\,C} : \frac{d.\,sin\,AB}{cos\,AB}$ mais $d\,sin\,C : d\,sin\,AB :: sin\,C : sin\,AB$; puisque le rapport de $sin\,C : sin\,AB$ doit être un rapport constant: donc en substituant ces quantités à leurs proportionnelles & ensuite les tangentes auxquelles elles se changent, on aura $d\,C : d\,AB :: tang\,C : tang\,AB$. On feroit voir de même que $dB : d\,AC :: tang\,B : tang\,AC$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

266. Si $A = 90°$, on aura $d\,C : d\,AB :: R : sin\,AC$, & pareillement $d\,B : d\,AC :: R : sin\,AB$ (n°. 228).

COROLLAIRE II.

267. Si le triangle est rectiligne, les variations des angles B & C sont égales; puisque la somme des trois angles, ainsi que l'un de ces angles, sont des quantités constantes. De plus les tangentes des côtés AB, AC se confondent avec ces côtés mêmes, ainsi l'on aura : *La différentielle d'un angle quelconque est à celle du côté opposé, comme la tangente de cet angle est au même côté opposé*, ou $d\,C : d\,AB :: tang\,C : AB$, ou à cause que $d\,C = dB$; $dB : dAB :: tang\,C : AB$ & $dC : dAC :: tang\,B : AC$.

THÉOREME VI.

268. *Supposant toujours un angle constant avec le côté qui lui est opposé, les variations des côtés seront comme les cosinus des angles opposés, & celles des angles comme les cosinus des côtés qui leur sont opposés*; c'est-à-dire, que $dAB : dAC :: cos\,C : cos\,B$, & que $dB : dC :: cos\,AC : cos\,AB$ (*fig.* 28).

DÉMONSTRATION.

Ayant pris $Db = DB$, & $Dc = DC$, il est visible que les angles en b & c seront des angles droits, & de plus que $bc = \beta\gamma$; ôtant de ces quantités égales la partie commune βc, on aura $\beta b = c\gamma$. Cela posé dans le

triangle rectangle βbB, on aura Bβ : $b\beta$: : R : *cof* B; & dans le triangle rectangle C$c\gamma$, on a auffi $c\gamma$: Cγ : : *cof* C:R; donc en multipliant par ordre, on aura Bβ : Cγ : : *cof* C : *cof* B ; ou *d* AB : *d* AC : : *cof* C : *cof* B. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°, En confidérant le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties font fuppléments de celles du triangle BAC, on trouveroit *d* DE : *d* EF : : *cof* E : *cof* D. Donc en fubftituant à chaque terme leurs correfpondants du triangle BAC, on aura *d* B : *d* C : : *cof* AC : *cof* AB. *C. Q. F.* 2°, *D.*

Corollaire I.

269. Puifque l'on a *d* AB : *d* AC : : *cof* C : *cof* B, on aura auffi (n°. 225) : : *cof* AB × *fin* AB × R — *cof* AC × *cof* BC × *fin* AB : *cof* AC × *fin* AC × R — *cof* AB × *cof* BC × *fin* AC ; & puifque l'on a auffi *d* C : *d* B : : *cof* AB : *cof* AC, on aura auffi en mettant pour *cof* AC fa valeur, & divifant les deux derniers termes par *cof* AB ; *d* C : *d* B : : $\frac{cof\,B \times fin\,B \times tang\,AB}{RR}$ + *cof* BC : R.

Corollaire II.

270. Puifque l'on a par le Théorême V *d* AB : *d* C : : *tang* AB : *tang* C, & que par le Théorême préfent *d* C : *d* B : : *cof* AB : *cof* AC, en multipliant ces deux proportions par ordre on aura . . . .
d AB : *d* B : : R × *fin* AB : *tang* C × *cof* AC ; on trouveroit de même que . . . .
d AC : *d* C : : R × *fin* AC : *tang* B × *cof* AB.

Si l'on fubftitue dans ces deux proportions à *fin* AB & à *fin* AC leurs valeurs refpectives $\frac{fin\,AC \times fin\,C}{fin\,B}$ & $\frac{fin\,AB \times fin\,B}{fin\,C}$, on aura ces nouvelles analogies :

d AB : *d* B : : *tang* AC × *cof* C : R × *fin* B
& . . *d* AC : *d* C : : *tang* AB × *cof* B : R × *fin* C.

Pareillement, fi l'on fubftitue encore dans la premiere

proportion à *cosin* AC sa valeur $\frac{\sin AC \times R}{\tang AC}$, on trouvera d AB : d B : : *tang* AC × *sin* AB : *tang* C × *sin* AC : : *tang* AC × *cos* BC — *sin* AC × *cos* AB : $\frac{\sin B \times \sin AC \times \sin AB}{R}$.

Enfin, si l'on suppose l'angle A de 90°, on aura dans la derniere proportion d AC : d C : : $\frac{1}{2}$ *sin* 2AC : R × *cot* C; en mettant pour *tang* B sa valeur $\frac{\cot C \times R}{\cos BC}$ & pour *cos* AB sa valeur; & mettant pour *sin* AC × *cos* AC l'expression qui lui est égale par le n°. 14.

COROLLAIRE III.

271. Si le triangle est rectiligne, les variations des côtés seront toujours comme les cosinus des angles opposés; & les variations des angles comme les cosinus des côtés opposés. Mais dans ce cas, les côtés étant ou pouvant être considérés comme des arcs infiniment petits, leurs cosinus seront tous égaux. Donc les différences des angles seront aussi égales entr'elles, comme on peut s'en convaincre d'ailleurs.

IV. SECTION.

Des variations d'un triangle sphérique ou rectiligne, lorsque deux de ses côtés demeurent constants.

THÉOREME VII.

272. *La variation de l'angle compris entre les deux côtés constants est à la variation d'un quelconque des deux autres angles, comme le produit du sinus total par le sinus du côté variable, est au produit du sinus du côté opposé à cet angle par le cosinus de l'autre angle adjacent à ce même côté;* c'est-à-dire, qu'en supposant les côtés AB, AC constants (*fig.* 29)

on aura d A : d B : : R × *sin* BC : *sin* AC × *cos* C

ou bien d A : d C : : R × *sin* BC : *sin* AB × *cos* B.

DÉMONTRATION.

Suppoſant que l'angle BAC ſoit devenu BAc; ſoient prolongés les côtés AC, Ac juſqu'à ce qu'ils ſoient des quarts de cercle ACF, Acf. Il eſt clair que Ff ſera la meſure de la variation de l'angle en A. Soient pareillement prolongés les côtés BC, Bc en G & g; enſorte que BCG, Bcg ſoient des quarts de cercle : il eſt encore viſible que Gg ſera la meſure de la variation de l'angle en B. Enfin ſoit pris ſur le côté Bc l'arc Bγ = BC, ce qui donnera le triangle Cγc rectangle en γ, dans lequel l'angle γc C eſt ſenſiblement égal au complément de l'angle C. Cela poſé, à cauſe des ſecteurs ſemblables Ff, Cc on aura . . . . . Ff : Cc : : R : *ſin* AC, & à cauſe du triangle rectangle Cγc,

on a . . . Cc : Cγ : : R : *coſ* C, &

à cauſe des ſecteurs ſemblables Gg, Cγ,

on a auſſi Cγ : Gg : : *ſin* BC : R. Donc

en multipliant ces trois proportions par ordre, & mettant pour Ff & Gg leurs valeurs,

on aura dA : dB : : R × *ſin* BC : *ſin* AC × *coſ* C;

on prouveroit de même

que . dA : dC : : R × *ſin* BC : *ſin* AB × *coſ* B. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

273. Si dans la premiere proportion on met à la place de *ſin* AC ſa valeur $\frac{\textit{ſin}\,BC \times \textit{ſin}\,B}{\textit{ſin}\,A}$, on trouvera dA : dB : : R × *ſin* A : *ſin* B × *coſ* C; & ſi l'on multiplie chaque terme du dernier rapport par $\frac{\textit{ſin}\,C}{\textit{coſ}\,C}$, on trouvera : : *ſin* BC × *tang* C : *ſin* AC × *ſin* C : : *ſin* A × *tang* C : *ſin* B × *ſin* C, en remettant pour *ſin* BC ſa valeur $\frac{\textit{ſin}\,AC \times \textit{ſin}\,A}{\textit{ſin}\,B}$: : *ſin* BC × *tang* C : *ſin* B × *ſin* AB, en faiſant diſparoître *ſin* C dans l'un des rapports précédents. Si l'on met dans la premiere proportion la valeur de *coſ* C (n°. 225) on

aura encore : : $\sin^2$BC : $\cos$AB × R — $\cos$AC × $\cos$BC ; ou bien mettant encore dans la même premiere proportion pour $\sin$ BC sa valeur $\frac{\sin AB \times \sin A}{\sin B}$: : $\sin$ AB × $\sin$ A : $\sin$ AC × $\frac{1}{2}$ $\sin$ 2C. Enfin : : R³ : $\sin^2$ B × $\cos$ AB — $\sin$ B × $\cos$ B × *cot* A, en substituant dans $\sin$ AC × $\cos$ C les valeurs des quantités qui s'y trouvent $\frac{\sin BC \times \sin B}{\sin A}$ & $\cos$AB × $\sin$ A × $\sin$ B — $\cos$ A × $\cos$ B × R ; & mettant *cot* A pour $\frac{\cos A}{\sin A}$, ou bien encore : : R³ : $\cos$AB × RR — $\sin$ AB × $\cos$ B × *cot* BC, en faisant disparoître *cot* A.

Corollaire II.

274. Des substitutions semblables dans la seconde proportion donneroient les rapports suivants *d* A : *d* C : : R × $\sin$ A : $\sin$ C × $\cos$ B : : $\sin$ BC × *tang* B : $\sin$ AB × $\sin$ B : : *tang* BC × $\sin$ BC : $\sin$ AC × $\sin$ C : : *tang* B × $\sin$ A : $\sin$ B × $\sin$ C : : $\sin^2$ BC : $\cos$ AC × R — $\cos$ AB × $\cos$ BC.

Corollaire III.

275. Si le triangle est rectiligne, les sinus des côtés deviennent les côtés mêmes ; ce qui donne *d* A : *d* B : R × BC : AC × $\cos$ C ; & *d* A : *d* C : : R × BC : AB × $\cos$ B ; c'est-à-dire, que les variations de l'angle compris entre les côtés constants, & de l'un quelconque des deux autres angles, *sont en raison composée de la directe des côtés opposés à ces angles, & de celle du rayon au cosinus de ce même angle.*

Théoreme VIII.

276. *La variation de l'angle compris entre les côtés constants est à celle du côté qui lui est opposé, comme le quarré du rayon est au rectangle du sinus d'un angle quelconque par le sinus du côté qui lui est adjacent ;* c'est-à-dire, que l'on aura toujours *d* A : *d* BC : : R² : $\sin$ C × $\sin$ AC : : R² : $\sin$ B × $\sin$ AB (*fig.* 29).

DÉMONSTRATION.

Les secteurs semblables Ff, Cc donnent, comme nous l'avons déja vu, $Ff : Cc :: R : \sin AC$; & le petit triangle rectangle $G\gamma c$ donne $Cc : \gamma c :: R : \sin C$. Donc en multipliant par ordre on aura $Ff\ \gamma c :: RR : \sin AC \times \sin C$, ou $dA : dBC :: RR : \sin A \times \sin C$. Si l'on veut faire varier l'angle A vers B, on auroit trouvé de même $dA : dBC :: RR : \sin AB \times \sin B$. *C.Q.F.D.*

COROLLAIRE I.

277. Si l'on substitue à $\sin AC$ sa valeur, on aura $dA : dBC :: R^2 \times \sin A : \sin BC \times \sin B \times \sin C ::$ $R^2 \times \sin BC \times \sin C : \sin^2 AB \times \sin A \times \sin B$, en mettant pour $\sin AC$ sa valeur $\frac{\sin AB \times \sin B}{\sin A}$, & substituant de même $\frac{\sin AB \times \sin A}{\sin BC}$ pour $\sin C$.

COROLLAIRE II.

278. Si le triangle est rectiligne, on aura $dA : dBC ::$ $R^2 : AC \times \sin C :: R^2 : AB \times \sin B :: R : AD$ (en supposant que AD est une perpendiculaire abaissée de l'angle A sur le côté BC opposé) ce qui apprend que si deux côtés d'un triangle rectiligne sont constantes, *les variations de l'angle compris entre ces côtés & du côté opposé à cet angle variable, sont comme le rayon est à la perpendiculaire abaissée de cet angle variable sur le côté opposé.*

THÉOREME IX.

279. *La variation d'un angle quelconque adjacent au côté variable est à celle de ce même côté, comme la cotangente de l'autre angle sur ce côté est au sinus de ce côté*; c'est-à-dire, que l'on aura $dC : dBC :: \cot B : \sin BC$, & $dB : dBC :: \cot C : \sin BC$ (*fig.* 29).

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a (n°. 272) $dA : dC :: R \times \sin BC :$

$\sin AB \times \cos B$, & (n°. 275) $dBC : dA :: \sin C \times \sin AC : R^2$; en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $dBC : dC :: \sin BC \times \sin C \times \sin AC : R \times \sin AB \times \cos B :: \sin BC : \frac{\sin AB \times \cos B \times R}{\sin C \times \sin AC} :: \sin BC : \cot B$ en mettant pour $\sin AB$ sa valeur $\frac{\sin AC \times \sin C}{\sin B}$, d'où l'on tire $dBC : dC :: \sin BC : \cot B$, & *invertendo* $dC : dBC :: \cot B : \sin BC$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

280. Puisque $dB : dBC :: \cot C : \sin BC$, il sera aisé de substituer à ce dernier rapport les suivants $:: R \times \cos C : \sin AB \times \sin A :: R : \tang C \times \sin BC :: RR : \tang C \times \sin BC :: \cot C \times \sin B : \sin AC \times \sin A :: R : \frac{\sin BC \times \sin B \times R}{\cot AB \times \sin BC - \cos B \times \cos BC} :: \cot AB \times \sin BC - \cos B \times \cos BC : \sin BC \times \sin B$. Et divisant par $\sin BC \times \sin B ::$ $\frac{\cot AB \times R}{\sin B} - \frac{\cot BC \times R}{\tang B} : R :: \cot AB - \frac{\cos B \times \cot BC}{R} : \sin B$, on trouveroit des rapports absolument semblables pour la proportion $dC : dBC :: \cot B : \sin BC$, c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas à les détailler ici.

COROLLAIRE II.

281. Puisque l'on a $dB : dBC :: \cot C : \sin BC$
& $dBC : dC :: \sin BC : \cot B$; en multipliant ces deux proportions par ordre, on trouvera $dB : dC :: \tang B : \tang C :: \sin AC \times \cos C : \sin AB \times \cos B :: \sin B \times \cos C : \sin C \times \cos B$, en substituant les valeurs des sinus des côtés AC, AB.

COROLLAIRE III.

282. Si le triangle est rectiligne, le dernier Théorême donnera $dBC : dC :: BC : \cot B :: BC \times \sin B : \cos B \times R$; ou comme la perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté AB est au cosinus de l'angle B. On trouveroit de même $dBC : dB :: BC : \cot C$; & enfin $dB : dC :: \tang B : \tang C$.

V. SECTION.

Des variations d'un Triangle sphérique dans lequel on suppose deux angles constants.

THÉOREME X.

283. *SUPPOSANT les deux angles* B & C *constants au triangle sphérique* BAC (fig. 28), *la variation du côté sur lequel ces angles sont adjacents, est à celle d'un quelconque des autres côtés, en raison composée de la directe des sinus des angles opposés à ces côtés & de celle du rayon au cosinus du troisieme côté;* c'est-à-dire, que l'on aura dBC : dAC : : *sin* A × R : *sin* B × *cos* AB.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties sont suppléments de celles du triangle BAC, les deux côtés DF & FE seront variables. D'où il suit que ce cas rentre dans celui du premier Théorême de la derniere section, on aura donc dF : dD : : R × *sin* DE : *sin* FE × *cos* E; & prenant les correspondants au triangle BAC, on aura dBC : dAB : : R × *sin* A : *sin* C × *cos* AC, on prouveroit de même que d BC : d AC : : R × *sin* A : *sin* B × *cos* AB. *C. Q. F. D.*

THÉOREME XI.

284. *La variation du côté adjacent aux angles constants est à celle de l'angle opposé, comme la sécante de complément d'un côté quelconque est au sinus de l'angle constant sur ce côté;* c'est-àdire, que l'on aura . . . . , dBC : dA : : *cosec* AB : *sin* B : : *cosec* AC : *sin* C.

DÉMONSTRATION.

On sait que la cosécante d'un arc est égale au quarré du rayon divisé par le sinus de cet arc. Ainsi tout se

réduit à prouver que $dBC : dA :: RR : \mathit{fin}\, B \times \mathit{fin}\, AB$; ce qui ſe prouvera par le moyen du triangle DEF, comme on vient de démontrer le dernier Théorême. *C. Q. F. D.*

Théoreme XII.

285. *La variation d'un côté quelconque oppoſé à l'un des angles conſtants, eſt à la meſure de la variation du troiſieme angle, comme la cotangente de l'autre côté eſt au ſinus de ce même angle variable;* c'eſt-à-dire, que l'on aura $dAB : dA :: \mathit{cot}\, AC\, \mathit{fin}\, A$; ou que $dAC : dA :: \mathit{cot}\, AB : \mathit{fin} A$.

Démonstration.

Cette propoſition ſe déduira immédiatement du Théorême IX, en applicant ce Théorême au triangle DEF, & faiſant les changements convenables. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

286. Il ſuit du dernier Théorême que les variations des côtés AB, AC oppoſés aux angles conſtants ſont comme les tangentes de ces mêmes côtés.

Corollaire II.

287. Si l'on ſuppoſe le triangle rectiligne, le premier Théorême dans la ſuppoſition actuelle nous apprend que la différentielle du côté variable eſt à celle d'un côté quelconque, dans la raiſon du ſinus des angles oppoſés, ce que l'on ſait d'ailleurs par la Géométrie Elémentaire. Le ſecond Théorême ne nous donne rien à connoître, parce que dA devient zéro dans un triangle rectiligne, dans lequel on ſuppoſe deux angles conſtants. Le troiſieme ne nous en apprend pas davantage par la même raiſon. Enfin le dernier Corallaire nous apprend que les variations des côtés ſont comme les côtés eux-mêmes, ce qui eſt conforme à ce que nous démontrons dans la Géométrie Elémentaire.

OBSERVATION.

288. On auroit pu démontrer aisément les Théorêmes qu'on vient de voir par les figures de nos projections, en cherchant les rapports évanouissants des différentes lignes qui y sont tracées. De même on auroit encore pu les déduire des formules analytiques que l'Algebre nous a fait découvrir, en supposant quelques-unes des lettres a, b, c, d, f, g &c, variables suivant les conditions du Théorême à démontrer, & passant ensuite des différentielles des sinus, tangentes, &c, à celles des arcs de cercle. Mais la méthode de M. COTES m'a paru la plus lumineuse, & en même temps la plus facile; c'est pourquoi, je n'ai fait, pour ainsi dire, que traduire son excellent morceau: *De æstimatione errorum in mixtâ Mathesi*. On me pardonnera d'avoir tâché de simplifier encore cette théorie, en l'appliquant aux triangles rectilignes par de simples Corollaires. Il ne nous reste plus que de faire quelques applications de cette théorie à différents exemples.

PREMIER EXEMPLE.

289. *Soit une hauteur* AB *qu'il faut mesurer avec un instrument, au moyen duquel on observe l'angle* ACB. *On demande quelle erreur on peut commettre sur cette hauteur, d'après celle qui peut avoir lieu dans la mesure de l'angle* (fig. 30).

SOLUTION.

Il est évident que dans le triangle BAC, le côté AC & l'angle droit restent constants. Donc on aura (n°. 258) dAB : dC : : BC : *sin* ABC : : 2AB : *sin* 2ACB. Car en substituant à *sin* 2ACB sa valeur $\frac{2\,sin\,ACB \times sin\,ABC}{R}$, cette proportion devient BC : R : : AB : *sin* ACB; donc *la variation de la hauteur* AB *est à la mesure de la variation de l'angle* C, *comme le double de cette hauteur est au*

sinus du double de l'angle observé. Donc l'erreur qui peut avoir lieu dans la détermination de cette hauteur, sera la plus petite possible, lorsque le sinus du double de l'angle observé sera le plus grand possible. Ce qui a lieu, lorsque cet angle est de 45°. Ainsi dans le cas où il faudroit déterminer une hauteur comme AB, par l'observation d'un angle en C, il faudra faire ensorte que l'angle observé soit le plus près qu'il est possible de 45°. *C. Q. F. T.*

290. Voyons présentement jusqu'où peut aller l'erreur du côté AB, en supposant que l'on se soit trompé d'une minute dans la détermination de l'angle. Si l'on dónne au rayon 10000000 l'arc d'une minute qui mesure l'erreur supposée, sera de 2909, dont le double est 5818. Or cette quantité est au sinus du double de l'angle demi-droit ou au rayon : : 1 : 1719. Ainsi dans la supposition actuelle on peut se tromper sur la hauteur AB de $\frac{1}{1719}$. Cette erreur augmentera ou diminuera dans la raison des erreurs qui auront eu lieu relativement à cet angle supposé de 45°. Si l'angle observé est plus grand ou plus petit que 45°, l'erreur augmentera dans la raison du rayon au sinus de l'angle double.

SECOND EXEMPLE.

291. *On demande l'heure du jour ou de la nuit par la hauteur observée d'une étoile ou d'un astre quelconque; & l'on propose d'assigner l'erreur du temps d'après l'erreur connue dans la hauteur observée* (fig. 31).

SOLUTION.

Soit le triangle sphérique PZS dans lequel P est le pole, Z le zénit de l'observateur, & S l'astre ou l'étoile observée; PS est le complément de la déclinaison de l'astre, PZ le complément de la latitude, ZS le complément de la hauteur. L'angle ZPS est l'angle horaire variable compris entre les côtés constants PZ, PS. L'on aura la variation de l'angle horaire

horaire SPZ à la variation du côté opposé SZ, comme la cosécante de l'angle PSZ est au sinus de l'arc PZ (n°. 276), ou $dP : dZS :: R^2 : \mathit{fin}\, Z \times \mathit{fin}\, PZ$; mais la variation de l'angle en P est la mesure de l'erreur du temps : ainsi l'on peut prendre dP pour l'erreur même du temps, & l'on aura dP ou $dt = \frac{dZS \times R^2}{\mathit{fin}\, Z \times \mathit{fin}\, PZ}$. *C.Q.F.T.*

COROLLAIRE.

292. Il suit de-là qu'en supposant la même erreur dans les observations & la latitude de l'observateur aussi la même, l'erreur du temps ne changera pas quelle que soit la hauteur de l'astre dans son vertical, puisque $\frac{R^2}{\mathit{fin}\, PZ}$ sera toujours une quantité constante. De plus, on voit que dans la même supposition de la latitude constante, l'erreur du temps sera la moindre possible, lorsque l'astre aura été observé dans le premier vertical. Enfin si l'on suppose deux latitudes différentes, l'erreur sera la moindre possible, lorsque l'observateur sera à l'équateur, & qu'il observera un astre placé dans le premier vertical.

Par exemple, en admettant ces deux conditions : Si l'on suppose de plus qu'on se soit trompé d'une minute dans l'observation de la hauteur ; l'on trouvera, en faisant le calcul, que l'erreur est de 4 secondes de temps. Si nous supposons à présent que l'observateur s'éloigne de l'équateur, cette erreur sera à la précédente dans la raison du sinus total au sinus de complément de la latitude, l'astre étant toujours observé dans le premier vertical. Ainsi pour une latitude de 45°, l'erreur sera de $5'' \frac{1}{3}$; pour une latitude de 50°, l'erreur seroit de $6'' \frac{2}{9}$; & pour une de 55°, l'erreur sera de $6'' \frac{17}{18}$. Enfin si l'astre a été observé dans un vertical quelconque incliné au méridien, l'erreur augmentera encore à l'égard de celles trouvées précédemment dans la raison du rayon au sinus de cet angle ; & ses variations suivront en même temps les va-

riations de l'erreur primitive supposée dans l'observation.

TROISIEME EXEMPLE.

293. *Soient* LSK, *&* L′ S′ K′ *deux cercles almikantarats ou paralleles à l'horizon* (fig. 32). S, S′ *les points où ces cercles sont rencontrés dans un même jour par un astre dont la déclinaison est supposée la même pendant tout ce jour : on demande quel doit être le rapport des angles* PSZ, PS′Z *de chaque cercle horaire* PS, PS′ *avec le vertical correspondant, pour que le temps que l'astre employera à passer d'un almikantarat à l'autre, soit le plus court possible.*

SOLUTION.

L'énoncé du Problême fait voir que dans les triangles PZS, PZS′, les côtés PZ & ZS, ZS′ sont constants, tandis que les côtés PS, PS′ varient. Soient donc nommés h & h' les angles horaires en P ; S & S′ les angles à l'astre en S & S′ de chaque cercle horaire PS, PS′ avec le vertical correspondant ZS & ZS′ ; & soit D la déclinaison dont la variation sera dD que nous ferons négative, parce que, suivant la figure, si cette déclinaison est boréale comme nous l'avons supposé ici, les arcs PS, PS′ diminuent à mesure que la déclinaison augmente. Cela posé, on aura par le n°. 279, $dh = -\frac{cot\, S \times dD}{cos\, D}$; & pareillement $dh' = -\frac{cot\, S' \times dD}{cos\, D}$. Donc, puisque le temps par l'arc SS′ doit être un *minimum*, la différence des variations des angles horaires doit être égale à zéro ; ce qui donnera $-\frac{cot\, S' \times dD}{cos\, D} + \frac{cot\, S \times dD}{cos\, D} = 0$; d'où l'on tire sur le champ $cot\, S' = cot\, S$: ce qui m'apprend que ce jour-là les angles S′, S doivent être égaux. Si l'astre est le soleil, & si l'un des almikantarats se confond avec l'horizon, & que l'autre soit le cercle crépusculaire que l'on suppose communément de 18° au-dessous de l'ho-

rizon ; le ſymptome qu'on vient de découvrir, m'apprend que ce jour-là les angles au ſoleil, ſoit à l'horizon, ſoit dans le cercle crépuſculaire, ſont égaux. Ce même ſymptome ſervira donc à trouver le jour du plus court crépuſcule, en cherchant d'abord quelle doit être la déclinaiſon qui répond à ce rapport déterminé pour les angles au ſoleil. C'eſt ce que nous allons faire dans le Problême ſuivant.

PROBLEME.

294. *Suppoſant égaux les angles de chaque cercle horaire avec le vertical qui lui répond ; on demande quelle doit être la déclinaiſon qui lui répond* (fig. 32).

SOLUTION.

Soient S & S' les angles de chaque cercle horaire avec le vertical ; & C, C' les diſtances de chaque cercle parallele à l'horizon à ce même grand cercle. Soit de plus L la latitude du lieu, & D la déclinaiſon de l'aſtre ; on aura pour le triangle PZS (n°. 225) $\frac{cof\, D \times cof\, S}{R} = \frac{R \times fin\, L - fin\, C \times fin\, D}{cof\, C}$, & pour le triangle PZS $\frac{cof\, D \times cof\, S'}{R} = \frac{R \times fin\, L + fin\, C' \times fin\, D}{cof\, C'}$. Nous avons mis le ſigne + dans la ſeconde formule, à cauſe que ZS' eſt obtus, ainſi que l'angle oppoſé. Donc, puiſque les premiers membres de ces équations ſont égaux, les ſeconds le feront auſſi, & donneront cette nouvelle équation $R \times fin\, L \times cof\, C' - fin\, C \times fin\, D \times cof\, C' = R \times fin\, L \times cof\, C + fin\, C' \times fin\, D \times cof\, C$, d'où l'on tire tout de ſuite cette proportion :

$fin\, C' \times cof\, C + fin\, C \times cof\, C' : R \times (cof\, C' - cof\, C) :: fin\, L : fin\, D$, ou n°. 86. $fin\, (C' + C) : cof\, C' - cof\, C :: fin\, L : fin\, D$, ou bien encore (par les n°s. 73 & 95) $cof\, \frac{(C + C')}{2} : fin\, \frac{(C - C')}{2} :: fin\, L : fin\, D$.

Si donc on suppose, comme cela a lieu dans le cas du plus court crépuscule que C soit zéro, on aura cette derniere proportion R : — *tang* $\frac{C'}{2}$: : *sin* L : *sin* D ; c'est-à-dire, *le rayon est à la tangente de la moitié de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon; comme le sinus de la latitude est au sinus de la déclinaison du soleil.* Comme cette déclinaison est négative à cause que *tang* $\frac{C'}{2}$ est précédée du signe —, on voit que la déclinaison du soleil doit être de dénomination contraire à la latitude. *C. Q. F. T. & D.*

Ancienne Solution.

295. Soit u le *cosinus* de l'angle horaire à l'instant où finit le crépuscule. L'angle sera représenté par cette intégrale $\int - \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - u^2}}$. Soit pareillement z le *cosinus* de l'arc semidiurne, cet arc sera $\int - \frac{r\,dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$. Donc il faut supposer $\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} - \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} = 0$. Nommons c le *sinus* de la latitude & g son cosinus ; h le *sinus* de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon, & y le sinus de la déclinaison ; on aura . . . $u = \frac{hr^2 - cry}{g\sqrt{r^2 - y^2}}$, & $z = \frac{cry}{g\sqrt{r^2 - y^2}}$. Au moyen de ces valeurs, chassons u & z dans la premiere équation, & divisons la transformée par dy ; nous aurons $hy^4 + 2cry^3 - g^2hy^2 - 2cr^3y - c^2hr^2 = 0$. D'où l'on tire $y = r$ & $y = -r$; & encore $y = -\frac{cr - \sqrt{r^2 - h^2}}{h}$ & $y = -\frac{cr + c\sqrt{r^2 - h^2}}{h}$ qui sont les quatre valeurs de l'inconnue y dans cette équation.

Les deux premieres valeurs indiquant le soleil au pole

où il ne peut physiquement arriver, sont étrangeres à la question, & ne nous donnent rien à connoître. Des deux autres, la plus grande donne le *minimum* de la somme de l'arc sémidiurne, & de l'arc parcouru depuis midi jusqu'à la fin du crépuscule; & la plus petite donne le *minimum* de la différence des mêmes arcs que nous cherchons. Ainsi la déclinaison demandée a pour sinus ......
$y = -\frac{cr + c\sqrt{r^2 - h^2}}{h}$. Donc si l'on nomme t la tangente de la moitié de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon, on aura $y = -\frac{ct}{r}$; ou $r : t :: c : -y$. Ce qui nous apprend, comme nous l'avons déja vu par notre premiere Solution, que la déclinaison du soleil est de dénomination contraire à la latitude de l'observateur.

OBSERVATION.

296. Il suit de notre premiere Solution que si deux triangles sphériques ont deux côtés égaux chacun à chacun avec un angle aussi égal opposé à l'un de ces côtés égaux, on aura cette analogie: *Le cosinus du côté opposé à l'angle égal, est au cosinus de l'autre côté adjacent au même angle égal; comme le cosinus de la demi-somme des autres côtés, est au cosinus de la demi-différence des mêmes côtés*. C'est ce qui se déduit immédiatement de ce que l'on a $cos\left(\frac{C+C'}{2}\right) : sin\left(\frac{C-C'}{2}\right) :: sin\, L : sin\, D$, en faisant attention que les dénominations particulieres au problême peuvent être généralisées, en ne conservant que ce qui est essentiel aux triangles que l'on est obligé de considérer.

Si l'on demandoit pareillement quelle doit être la déclinaison d'un astre, pour que dans l'intervalle de deux angles horaires donnés, le changement en hauteur fût le moindre possible. On trouveroit par le même procédé

& avec les dénominations précédentes que $cos\left(\frac{h'-h}{2}\right)$, $cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)$: : *tang* L : *tang* D.

QUATRIEME EXEMPLE.

PROBLEME.

297. *Trouver en tout temps la correction qu'il faut faire au midi conclu par les hauteurs correspondantes d'un astre dont la déclinaison subit une petite variation, pendant l'intervalle des deux hauteurs égales* (fig. 32).

SOLUTION.

Les Astronomes, pour s'assûrer de l'instant du midi, observent la hauteur du centre du soleil quelques heures avant midi; & quelques heures après, ils observent l'instant auquel cet astre est à la même hauteur sur l'horizon: le milieu de l'intervalle de temps compris entre ces deux observations & compté sur la pendule, marque l'instant du passage du soleil par le méridien. Cette méthode seroit exacte & rigoureuse si la déclinaison du soleil n'éprouvoit aucune variation dans l'intervalle des observations; ce qui n'a jamais lieu rigoureusement. Le temps des solstices est celui où cette erreur est la moindre possible, parce que pour lors le soleil ne change pas sensiblement de déclinaison pendant deux ou trois jours. Dans tous les autres moments de l'année, cette opération a besoin d'une correction qu'il s'agit de déterminer par ce problême. Car il est visible que lorsque le soleil est dans les signes ascendants, il arrive plus tard à la même hauteur; & dans les signes descendants, il arrive plutôt à la même hauteur: il faut donc dans les six premiers mois retrancher quelque chose, & ajouter quelque chose dans les six autres mois pour avoir l'instant précis du midi.

Pour trouver cette correction; soit P*s* un cercle horaire très-voisin de l'arc PS, & terminé à ce même almi-

kantarat LSK (*fig.* 32), il eſt viſible que la meſure de l'angle SP*s* réduite en temps exprime de combien le ſoleil eſt arrivé plus tard ou plutôt l'après-midi à la même hauteur que le matin. Donc la moitié de cet arc ſera ce qu'il faudra ôter ou ajouter à l'inſtant du midi conclu par la hauteur correſpondante. Cela ſuppoſé, ſi le changement en déclinaiſon eſt aſſez petit, pour qu'on puiſſe le confondre ſenſiblement avec la variation naiſſante ou la différentielle de l'arc PS; il eſt viſible qu'au triangle PZS, les arcs PZ & ZS demeureront conſtants, tandis que le côté PS eſt variable. Or nous avons trouvé (art. 280) que $dB : dBC :: \frac{cot\ AB}{ſin\ B} \pm \frac{cot\ BC}{tang\ B} : R$: en mettant B, A, C aux points P, Z, S, ce qui donne $dP = \frac{tang\ PS}{R} \times \left(\frac{tang.\ latitude}{ſin\ P} \pm \frac{tang.\ déclinaiſon}{tang\ P}\right)$. Cette formule eſt préciſément celle que donne M. DE MAUPERTUIS, p. 34 de ſon Aſtronomie Nautique. Le ſigne + a lieu, lorſque la déclinaiſon eſt auſtrale; il eſt négatif, lorſque la déclinaiſon eſt boréale, comme il eſt aiſé de s'en aſſûrer par le détail de nos Solutions géométriques. La moitié de cet arc réduit en temps ſera la correction demandée. *C. Q. F. T.*

Ceux qui ſeroient curieux de voir un plus grand nombre d'applications de ces analogies différentielles, peuvent avoir recours aux Mémoires de l'Académie année 1744. On en trouvera auſſi un grand nombre dans l'Aſtronomie de M. DE LA LANDE. Nous obſerverons ſeulement que ſouvent pluſieurs de ces ſolutions ne ſont pas dans une rigueur vraiment Géométrique; mais elles approchent d'autant plus de la préciſion que les arcs que l'on conſidere, peuvent plus aiſément être pris pour des arcs naiſſants. Nous terminerons ce Chapitre par la ſolution d'un problême plus curieux qu'utile, mais qui néantmoins nous apprend encore des vérités intéreſſantes par la ſimplicité de la ſolution à laquelle on arrive. Il

s'agit dans ce Problême de trouver la surface d'un triangle sphérique quelconque. Plusieurs Géometres & M. JACQUES BERNOULLI entr'autres, ont cherché la quadrature de cette portion de la surface de la sphere; ils ont eu pour l'élément de cette surface une différentielle dont l'intégrale dépend de la quadrature de l'hyperbole. La solution que je donne ici, & que j'ai tiré de M. WALLIS, est certainement la plus élégante que l'on puisse découvrir, & pourroit indiquer des moyens de ramener à la quadrature du cercle des intégrales de différentielles assez compliquées.

PROBLEME.

298. *Trouver la surface d'un triangle sphérique quelconque* BAC (fig. 33).

SOLUTION.

Soient d'abord prolongés les côtés AB & BC d'un angle quelconque B, de maniere que BA*b*, BC*b*; AB*a*, CB*c* soient chacun des arcs de 180°: il est visible que le triangle A*b*C sera égal en tout au triangle *a*B*c*. Soit conçu un plan qui passe par les points A, C; *a*, *c*, & par conséquent par le centre de la sphere; ce qui donnera la surface ACB*ac* égale à celle d'une demi-sphere, que nous désignerons par *s*, en faisant le rayon de son grand cercle $= r$, & la circonférence $= c$. Enfin soient encore désignés par les lettres M, N, O, P, *n* les triangles ABC, CB*a*, *a*B*c*, *c*BA, A*b*C. Cela posé, la portion ou le fuseau sphérique *b*ABC*b*, se déterminera par cette analogie $c : B :: s : \frac{Bs}{c} = M + n$, ou $M + N$; de même le fuseau AC*a*BA se déterminera par cette autre $c : A :: s : \frac{As}{c} = M + O$; & le fuseau CB*c*AC se trouvera en faisant $c : C :: s : \frac{Cs}{c} = M + P$.

Donc en rassemblant toutes ces égalités, on aura

$\overline{B + A + C} \times \frac{s}{c} = 3M + N + O + P$; & à cauſe que $M + N + O + P = \frac{1}{2}s$, on trouvera M ou l'aire du triangle $BAC = \frac{B + A + C}{2c} \times s - \frac{1}{2}s$; & parce que la ſurface de la demi-ſphere $= cr$, on aura enfin l'aire du triangle ſphérique $BAC = \left(\frac{B + A + C}{2}\right) \times r - \frac{1}{2}cr$ ou $\left(\frac{B + A + C - c}{2}\right) \times r$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra ajouter les trois angles du triangle ſphérique, en ôter la circonférence ou ôter cette même ſomme de 360°, lorſqu'elle ſurpaſſera quatre angles droits, & multiplier la demi-différence par le rayon.

CHAPITRE SIXIEME.

Application des Regles démontrées dans les Chapitres précédents à quelques Problêmes d'Aſtronomie ſphérique.

QUOIQU'AVEC les Tables que nous avons ajoutées à la fin du ſecond Chapitre, on ſoit en état de réſoudre tous les problêmes qui ſe réduiront à quelques-uns des cas des triangles ſphériques rectangles ou obliquangles; néanmoins comme ceux qui n'auroient pas un certain uſage des calculs trigonométriques, pourroient craindre de ſe tromper dans l'application de ces regles aux nombres, j'ai cru ne pouvoir me diſpenſer d'ajouter ici un certain nombre d'exemples, afin de rendre ce petit Traité le plus complet qu'il ſeroit poſſible. J'aurois pu, comme tous les Auteurs Trigonométriques, faire ces ap-

plications sur des triangles quelconques, dont les parties n'auroient eu aucune dénomination particuliere ; mais j'ai mieux aimé supposer tous ces triangles relatifs aux cercles de la sphere, afin de rendre ces solutions plus intéressantes pour les Commençants.

Nous supposerons donc toujours dans la suite les principaux cercles de la sphere désignés, comme ils se trouvent marqués dans la figure 34. HOR est l'horizon ; l'équateur AOQ ; l'écliptique IEL. Faisant avec l'équateur un angle qui diminue très-lentement, & que nous supposerons avec tous les Astronomes pour le temps présent de $23^\circ 28' 30''$. PZH est le méridien dans lequel les points P, *p* représentent les poles ; savoir, P celui qui est élevé sur l'horison, & *p* celui qui est abaissé au-dessous. Nous supposerons la hauteur du pole de $48^\circ 51'$, telle qu'elle est pour la ville de Paris. Enfin nous désignerons un astre quelconque par S. Nous supposons qu'on sait ce que c'est que la déclinaison d'un astre, son ascension droite, sa longitude & sa latitude, ainsi que les principaux cercles de la sphere, dont on trouve des notions suffisantes dans tous les éléments de la sphere.

PROBLEME I.

299. *Connoissant le lieu du soleil dans l'écliptique, trouver sa déclinaison ou sa distance* SD *à l'équateur* (fig. 34).

SOLUTION.

Soit S le lieu du soleil $18^\circ 24'$ du taureau ; donc l'arc ES sera de $48^\circ 24'$; ainsi dans le triangle SDE rectangle en D, on connoît l'hypoténuse ES, & l'angle DES de $23^\circ 28' 30''$ égal à l'obliquité de l'écliptique. On aura donc par la table des triangles rectangles . . . . .
$\sin DS = \frac{\sin ES \times \sin DES}{R}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

Log. sin. 48° 24′ = 9,873784.
Log. sin. 23° 28′ 30″ = 9,600263.
9,474047. = *log. sin.* 17° 19′ 49″.

PROBLEME II.

300. *Connoissant la déclinaison du soleil, & de plus dans quelle saison de l'année on se trouve déterminer le lieu du même astre dans l'écliptique* (fig. 34).

SOLUTION.

Supposons que la déclinaison du soleil est boréale de 17° 19′ 49″, & que l'on est dans le printemps ; il faut trouver l'arc ES de l'écliptique compris entre le soleil & le premier degré d'Ariès. Il est visible que dans le triangle rectangle DES, on connoît l'angle E avec le côté DS qui lui est opposé. On aura donc l'hypoténuse ES par l'analogie commune qui donne . . . .

$$sin\ ES = \frac{sin\ DS \times R}{sin\ DES}.$$

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,474047 = *log. sin.* DS = 17° 19′ 49″.
0,399737 = *comp. Arit, sin* 23° 28′ 30″.
9,873784 = *log. sin.* ES = 48° 24′ 0″.

SCHOLIE.

301. On voit par ces deux problêmes comment on a pu par l'observation dresser des tables du mouvement du soleil dans l'écliptique & de ses variations : car après avoir bien établi la latitude du lieu de l'observateur & fixé un quart de cercle dans le plan du méridien, l'observation de la hauteur méridienne du soleil donne sa déclinaison ou sa distance à l'équateur, de laquelle il a été facile de conclure chaque jour sa longitude, comme on vient de faire.

PROBLEME III.

302. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique ; trouver ſon aſcenſion droite ; ou, ce qui revient au même, le point D de l'équateur qui paſſe au méridien en même temps que le ſoleil* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſant toujours l'arc ES de 48° 24′ 0″, il s'agit de trouver l'arc ED. La Table des triangles rectangles donne pour ce cas $tang\ ED = \frac{tang\ ES \times cof\ DES}{R}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

10,051665 = *log. tang.* 48° 24′ 0″.
9,962480 = *log. coſin.* 23° 28′ 30″.

10,014145 = *log. tang.* 45° 55′ 58″.

PROBLEME IV.

303. *Connoiſſant la latitude d'un lieu & la déclinaiſon du ſoleil ; trouver ſon amplitude orientale ou occidentale, c'eſt-à-dire, à quelle diſtance de l'orient ou de l'occident vrai ſe leve ou ſe couche le ſoleil* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſant toujours la latitude de 48° 51′ 0″, & que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale de 18° 30′ ; il eſt viſible que le problême ſe réduit à trouver l'hypoténuſe d'un triangle rectangle DOS, dans lequel on connoît l'angle DOS complément de la latitude avec le côté DS égal à la déclinaiſon du ſoleil. On aura donc par l'analogie commune $ſin\ OS = \frac{ſin\ DS \times R}{ſin\ DOS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,501476 = *log. ſin.* OS = 18° 30′ 0″.
0,181753 = *com.* A. *log. ſin.* 41° 9′ 0″.

9,683229 = *log. ſin.* OS = 28° 49′ 45″.

COROLLAIRE I.

304. Il ſuit de ce qui précede que ſi l'on connoît la déclinaiſon du ſoleil & ſon amplitude, on connoîtra aiſément la latitude du lieu; car ſuivant ces ſuppoſitions au triangle rectangle DOS, on connoîtra, outre l'angle droit, le côté DS & l'hypoténuſe; on aura donc $fin\ DOS = \frac{fin\ DS \times R}{fin\ OS}$, & par logarithmes:

9,501476 = log. ſin. 18° 30′ 0″.
0,316771 = comp. arit. log. ſin. 28° 49′ 45″.

9,818247 = log. ſin. 41° 9′ 0″, donc la latitude eſt de 48° 51′ 0″.

COROLLAIRE II.

305. De même connoiſſant l'amplitude OS & la latitude d'un lieu, on trouvera la déclinaiſon du ſoleil qui convient à cette amplitude; on aura donc . . . . . .

$$fin\ DS = \frac{fin\ OS \times fin\ DOS}{R}$$, & par Logarithmes

9,683229 = log. ſin. 28° 49′ 45″.
9,818247 = log. ſin. 41° 9′ 0″.

9,501476 = log. ſin. 18° 30′ 0″.

PROBLEME V.

306. *Connoiſſant la latitude d'un lieu, & le degré du ſoleil dans l'écliptique; trouver le point de l'équateur qui eſt à l'horiſon, en même temps que le ſoleil; ou, ce qui revient au même l'aſcenſion oblique qui convient à cette latitude & au lieu du ſoleil.*

SOLUTION.

Suppoſons, comme dans le premier Problême, que le lieu du ſoleil dans l'écliptique eſt 18° 24′ du taureau. Nous avons déja trouvé ſa déclinaiſon de 17° 19′ 49″ (n°. 299). Donc au triangle rectangle DOS, l'on connoît le côté DS & l'angle DOS complément de la latitude; le côté OD eſt celui qu'il faut trouver. La Ta-

ble générale des triangles rectangles donne . . . . . .

$$sin\, OD = \frac{tang\, DS \times R}{tang\, DOS}.$$

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,494217 = *log. tang.* . . . 17° 19′ 49″.
0,058541 = *comp. arit. tang.* 41° 9′ 0″.

9,552758 = *log. sin.* OD = 20° 55′ 15″.

Si de l'ascension droite DE que nous avons trouvée (n°. 302) . . . . de 45° 55′ 58″
on ôte l'arc que nous venons de trouver. 20° 55′ 15″
on aura pour l'ascension oblique EO . . 25° 0′ 43″.

SCHOLIE.

307. On sait qu'à l'équateur les jours sont continuellement égaux aux nuits, parce que dans la sphere droite le point D se confond avee le point O. Dans la sphere oblique l'arc DO exprime ce qu'il faut ajouter ou ôter à 90° pour avoir la durée de la moitié du jour, selon que le soleil est dans les signes septentrionaux ou méridionaux pour une latitude boréale. On voit aisément que je n'ai point égard ici à l'augmentation causée par la réfraction.

PROBLEME VI.

308. *Connoissant la latitude, & le lieu du soleil dans l'écliptique; trouver l'angle de l'écliptique avec l'horizon à l'instant du lever de cet astre.*

SOLUTION.

Supposant toujours que le lieu du soleil est 18° 24′ du taureau; que la latitude est de 48° 51′; son complément AOH ou DOS sera de 41° 9′ 0″. Nous avons déja trouvé au (n°. 299) l'arc DS de 17° 19′ 49″. Avec cet arc on calculera, comme au Problême IV, l'amplitude orientale OS dont on trouvera le logarithme de sinus = 9,655800. De plus nous venons de trouver

pour les mêmes données au dernier problême EO = 25° 0′ 43″. Donc par l'analogie commune entre les sinus des côtés & ceux des angles opposés, on trouvera $\text{sin ESO} = \frac{\text{sin SEO} \times \text{sin EO}}{\text{sin OS}}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,600263 = *log. sin.* . . 23° 28′ 30″.
9,626141 = *log. sin.* . . 25° 0′ 43″.
0,344200 = *Comp. A. log. sin.* OS.

9,570604 = *log. sin.* ESO = 21° 50′ 32″.

SCHOLIE.

309. Par des calculs à peu près semblables à ceux des problêmes précédents, il seroit aisé de trouver l'arc IE de l'écliptique compris entre le méridien & l'intersection du même écliptique avec l'équateur. Car ayant l'ascension oblique EO, on a l'arc AE de l'équateur qui en est le complément; donc au triangle rectangle IAE, on connoît le côté AE avec l'angle en E égal à l'obliquité de l'écliptique. On connoîtroit de même l'arc du méridien compris entre l'équateur & l'écliptique; ainsi que l'angle de l'écliptique avec le méridien & l'arc IS compris entre le méridien & l'équateur.

J'ajouterai encore ici un problême dont la solution ne dépend que d'un triangle rectangle ordinaire, quoique M. DE MAUPERTUIS y ait employé le calcul différentiel.

PROBLEME VII.

310. *Connoissant la déclinaison d'un astre avec la latitude de l'observateur; trouver 1°, le moment auquel il paroît monter verticalement sur l'horizon; 2°, la hauteur de l'astre dans le vertical; 3°, l'angle de ce même vertical avec le méridien* (fig. 34).

SOLUTION.

Pour peu qu'on fasse attention à la nature du problê-

me, on voit que l'aſtre, en décrivant ſon parallele, ne peut s'élever perpendiculairement à l'horizon, qu'autant que ſon parallele pourra être touché par un vertical; & que l'aſtre ſe trouvera dans le point de contact de ſon parallele avec ce même vertical; ce qui aura lieu deux fois dans une révolution de 24 heures. De plus, il eſt aiſé de reconnoître qu'un parallele quelconque ne peut être touché par un cercle vertical, qu'autant que la diſtance de ce parallele à l'équateur ſera plus grande que la latitude de l'obſervateur. Car dans le cas où elle ſeroit moindre & de même dénomination que la latitude, il eſt clair que ce parallele ſera toujours coupé par quelque cercle vertical que ce puiſſe être. Cela poſé, ſoit ZST, un vertical quelconque qui touche le parallele GSM au point S où ſe trouve l'aſtre dont la déclinaiſon a pour complément l'arc PS. Il eſt viſible à cauſe du point de contact du vertical & du parallele, que l'arc PS eſt le plus petit qu'on puiſſe mener du point P au vertical ZST. Donc l'angle PSZ ſera droit, & dans ce triangle rectangle PSZ on connoît outre l'angle droit le côté PS égal au complément de la déclinaiſon de l'étoile, & le côté PZ égal au complément de la latitude de l'obſervateur. Donc ſi on connoît la différence d'aſcenſion droite de l'étoile & du ſoleil, l'angle horaire ZPS donnera l'inſtant où cet aſtre paroîtra s'élever perpendiculairement à l'horizon: le côté ZS donnera le complément de la hauteur de l'aſtre ſur l'horizon, & l'angle PZS donnera la poſition du vertical demandé à l'égard du méridien. Soit donc L la latitude; D, la déclinaiſon de l'aſtre; H, l'angle horaire ZPS; V, l'angle du vertical avec le méridien; & H', la hauteur de l'aſtre ſur l'horizon lorſqu'il paroît monter verticalement, les formules des triangles rectangles donneront $\textit{coſ}\,H = \frac{\textit{cotang}\,D \times R}{\textit{cotang}\,L}$, $\textit{ſin}\,H' = \frac{\textit{coſ}\,L \times R}{\textit{coſ}\,D}$ & $\textit{ſin}\,V = \frac{\textit{coſ}\,D \times R}{\textit{coſ}\,L}$. Les applications en nombres n'auront aucune difficulté.

PROBLEME

PROBLEME VIII.

311. *Connoissant la latitude & la déclinaison du soleil; trouver l'heure de son lever & de son coucher* (fig. 34).

SOLUTION.

Supposant la déclinaison boréale de 18° 30', & la latitude de 48° 51' 0"; il est visible qu'au triangle rectangle PSR, l'on connoît PR égal à la latitude & PS complément de la déclinaison; l'angle RPS est celui qu'il faut trouver, on aura donc $cos\,RPS = \frac{tang\,PR \times R}{tang\,PS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

10,058541 = *log. tang.* 48° 51' 0"
9,524520 = *com. A log. tang.* 71° 30' 0"
9,583061 = *cos* RPS = 67° 29' 17".

Pour savoir à quelle heure du matin répond cette valeur de l'angle RPS, on se servira de la Table suivante, laquelle nous fait connoître que le jour où la déclinaison étoit boréale de 18° 30' pour un lieu dont la latitude est de 48° 51', le soleil se leve à 4 heures 29 minutes 57 secondes.

pour 15°	. . .	1 *heure.*
1°	. . .	4 *minutes.*
15'	. . .	1 *minute.*
1'	. . .	4 *secondes.*
15"	. . .	1 *seconde.*
1"	. . .	4 *tierces.*
15'''	. . .	1 *tierce.*

SCHOLIE.

312. Si l'on connoissoit déja l'amplitude, il faudroit faire cette proportion pour avoir l'angle RPS: *Le cosinus de la déclinaison est au sinus total, comme le cosinus de l'amplitude est au sinus de l'angle horaire* RPS. Et réciproquement, connoissant l'heure du lever ou du coucher du soleil, on connoîtroit l'amplitude orientale ou occidentale par cette analogie: *Le sinus total est au cosinus de la déclinaison, comme le sinus de l'angle horaire est au cosinus de l'amplitude.*

On voit de même, que si l'on connoît la déclinaison du soleil & l'heure de son lever, on trouvera aisément la latitude du lieu; puisque dans le triangle rectangle SRP, on connoît l'hypoténuse avec l'angle P. On trouveroit aussi la déclinaison du soleil par l'heure de son lever & par la latitude. Enfin on peut appliquer cette solution au lever & au coucher des planetes & des étoiles, pourvu que l'on connoisse leur déclinaison & leur ascension droite. Car si l'on cherche pour le même jour l'ascension droite du soleil par sa déclinaison, en prenant la différence de celle de l'étoile & du soleil, & la réduisant en heures, minutes & secondes par la table précédente, on aura le temps dont cet astre suit ou précede le lever du soleil; ce qui fera connoître dans quel temps de l'année une étoile peut être visible ou invisible suivant sa distance au soleil.

On peut aussi faire usage de ce problême pour connoître la réfraction horizontale d'un astre. Car sachant, par exemple, l'heure vraie du lever du soleil, & connoissant le temps apparent, il n'y a qu'à prendre la différence que l'on réduira en partie de l'équateur. Ensuite on calculera le côté ZS relatif à ce nouvel angle, duquel ôtant 90°, le reste sera ce dont l'astre a paru plus élevé par la réfraction.

PROBLEME IX.

313. *Connoissant la latitude, la déclinaison & la hauteur du soleil sur l'horizon; trouver l'heure qu'il est* (fig. 35).

SOLUTION.

Soit la déclinaison boréale de 18° 30'; la latitude de 48° 51', & la hauteur du soleil de 52° 35'. On connoît donc les trois côtés du triangle PZS, & c'est l'angle ZPS qu'il faut trouver; ce qui se fera aisément par la formule $\sin \frac{1}{2} P = \frac{\sqrt{\sin(\frac{1}{2}s - b) \times \sin(\frac{1}{2}s - c)}}{\sqrt{\sin b \times \sin c}}$ dans la-

quelle s est la somme des trois côtés; b & c sont les côtés adjacents à l'angle demandé. L'opération se pratique en nombre comme on le voit ici.

	75° 2′ 0″
37° 25′ 0″	41° 9 0″
71° 30′ 0″	
41° 9′ 0″	33 53′ 0″ $= \frac{1}{2} s - b$
150° 4′ 0″ $= s$	75° 2′ 0″
75° 2′ 0′ $= \frac{1}{2} s$	71 30 0″
	3° 32 0″ $= \frac{1}{2} s - c$

9,746248 = *log. sin.* . . . . 33° 53′
8,789787 = *log. sin.* . . . . 3° 32′
0,023043 = *comp. ar. log. sin.* 71° 30′
0,181753 = *comp. ar. log. sin.* 41° 9′

18,740831
9,370415 = *log. sin.* $\frac{1}{2}$ *P.* = 13° 34′ 14″.

Donc l'angle ZPS = 27° 8′ 28″, & l'heure qui répond à cet angle, est 10 heures 11 minutes 26 secondes 8 tierces du matin, si l'angle ZPS est à l'orient du méridien; ou 1 heure 48 minutes 33 secondes 52 tierces, si le même angle est à l'occident du méridien.

COROLLAIRE.

314. Ce Problême donne un moyen facile de connoître la durée du crépuscule. Pour cela il n'y a qu'à concevoir le soleil abaissé de 18° au-dessous de l'horizon. (C'est l'abaissement que l'on suppose communément au cercle crépusculaire). L'arc ZS sera de 108°; on calculera, comme dans le présent Problême, l'angle horaire ZPS; on le soustraira de 180°, & le reste réduit en parties de temps donnera le commencement du crépuscule ou le point du jour. Si c'est la fin du crépuscule que l'on demande, ce sera l'angle ZPS lui-même qu'il faudra réduire en parties de temps.

OBSERVATION.

Dans la pratique de ce Problême, il faut avoir soin de

corriger la hauteur de l'astre par la réfraction, & par la parallaxe s'il en a une sensible : on trouve des Tables de ces corrections dans la plupart des Traités d'Astronomie.

PROBLEME X.

315. *Connoissant la latitude, la déclinaison du soleil & sa hauteur sur l'horizon ; trouver l'angle que le vertical dans lequel se trouve le soleil fait avec le méridien* (fig. 35).

SOLUTION.

Il est visible par les données du problême que dans le triangle PZS, on connoît les trois côtés ; & c'est l'angle PZS qu'il faut découvrir, ce qui se fera comme au problême précédent. Supposant donc les mêmes données qu'au problême précédent.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

33° 53′ = $\frac{1}{2}$ *s* − *b*	9,746248 = *log. sin.* $\frac{1}{2}$ *s* − *b*
37° 37′ = $\frac{1}{2}$ *s* − *c*	9,785597 = *log. sin.* $\frac{1}{2}$ *s* − *c*
	0,181753 = *comp. ar. log. sin.* 41° 9′
	0,216377 = *comp. ar. log. sin.* 35° 25′
	19,929975
	9,964987 = *log. sin.* $\frac{1}{2}$ PZS = 134° 36′ 6″

& partant l'angle HZK du vertical du soleil avec le méridien de 45° 23′ 54″.

SCHOLIE.

316. Par cette opérarion, il est aisé de connoître les quatre points cardinaux. Car faisant avec une ligne qui représente le vertical du soleil un angle égal à l'angle trouvé, l'on aura la méridienne. Cette méthode, pourvu qu'on ait soin de corriger la hauteur du soleil par la réfraction, est d'autant plus commode dans la détermination de la méridienne qu'elle n'est point sujette aux changements en déclinaison qui ont lieu pour les hauteurs correspondantes : elle sert aussi à déterminer la variation de la boussole.

PROBLEME XI.

317. *Connoissant la latitude, la déclinaison & l'heure à laquelle le soleil s'est trouvé dans un vertical dont on ignore la position; trouver l'angle que fait ce même vertical avec le méridien* (fig. 35).

SOLUTION.

Par l'énoncé du problême, il est visible que dans le triangle sphérique PZS, l'on connoît les deux côtés PZ & PS avec l'angle ZPS qu'ils comprennent. Supposons donc la déclinaison de 18° 30', & qu'on ait observé le soleil dans le vertical dont on demande la position à 10 heures 11 minutes 26 secondes. On trouvera par la Table donnée au problême VIII que l'angle horaire qui répond à cette heure, est de 27° 8' 30". L'arc PS sera toujours de 71° 30', & PZ de 41° 9'. Cela posé, pour avoir l'angle PZS, on abaissera l'arc SR perpendiculairement au côté PZ, du sommet de l'angle S non cherché, suivant ce que prescrit la Table pour la résolution des triangles sphériques obliquangles, & l'on aura d'abord $tang\ PR = \frac{cos\ ZPS \times tang\ PS}{R}$, ce qui donnera PR que nous avons nommé premier segment.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,949332 = *log. cos.* 27° 8' 30"
0,475480 = *log. tang.* 71° 30' 0"
10,424812 = *log. tang.* 69° 23' 37" = PR,

donc le second segment RZ sera de 28° 14' 37", ce qui donnera par la formule de la Table générale des triangles obliquangles $Tang\ PZS = \frac{tang\ 27°\ 8'\ 30'' \times sin\ 69°\ 23'\ 37''}{sin\ 28°\ 14'\ 37''}$; achevant l'opération comme on le voit ici :

9,709815 = *log. tang.* . . . 27° 8' 30"
9,971285 = *log. sin.* . . . . . 69° 23' 37"
0,324936 = *comp. ar. log. sin.* 28° 14' 37"
0,006036 = *log. tang.* . . 45° 23' 53".

SCHOLIE.

318. Ce Problême peut servir à trouver la déclinaison d'un plan vertical quelconque. On pourroit aussi l'employer à déterminer les alignements d'une allée d'arbres ou d'une rue bien dressée, en observant le moment où l'ombre a passé par le pied des arbres ou des murs. Si l'on connoît de plus la hauteur du soleil sur l'horizon au moment de l'observation, le calcul deviendra encore plus simple, & se réduira à cette analogie : *Le cosinus de la hauteur du soleil est au sinus de l'angle horaire, comme le cosinus de la déclinaison de l'astre est au sinus de l'angle du vertical avec le méridien.*

PROBLEME XII.

319. *Connoissant l'heure qu'il est, la déclinaison & la hauteur du soleil; trouver la latitude du lieu* (fig. 35).

SOLUTION.

Par les données du Problême, on voit que l'on connoît le côté PS complément de la déclinaison avec l'angle P, & le côté ZS complément de la hauteur du leil; & c'est le côté ZP qu'il faut trouver. Supposant donc, comme aux Problêmes précédents, la déclinaison du soleil de 18° 30′, & qu'il est 10 heures 11 minutes 26 secondes, ce qui donne l'angle P de 27° 8′ 30″, & que la hauteur du soleil est de 52° 35′ 0″, d'où l'on conclura l'arc ZS de 37° 25′; pour avoir le côté PZ, on abaissera de l'angle S la perpendiculaire SR, & l'on déterminera d'abord PR suivant la table générale des triangles obliquangles par la formule *tang* premier segment = *cos* angle donné, × *tang* côté adjacent, & ensuite on fera $cos\,RZ = \frac{cos\ I.\ segment \times sin\ 52^\circ\ 35'}{sin\ 18^\circ\ 30}$, d'où l'on déduira sur le champ la valeur du côté PZ égal au complément de la latitude.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

1°. 9,949332 = *log. cos.* 27° 8′ 30″
0,475480 = *log. tang.* 71° 30′ 0″

0,424812 = *log. tang.* 69° 23′ 37″

2°. 9,546475 = *log. cos.* . . . 69° 23′ 37″
9,899951 = *log. sin.* . . . 52° 35′ 0″
0,498524 = *comp. ar. log. sin.* 18° 30′ 0″

9,944950 = *log. cos.* RZ = 28° 14′ 37″

ôtant donc ce second segment du premier que nous venons de trouver de 69° 23′ 37″, on aura pour le complément de la latitude 41° 9′ 0″, & partant 48° 51′ 0″ pour la latitude.

PROBLEME XIII.

320. *Connoissant la déclinaison du soleil, sa hauteur & son angle azimutal, c'est-à-dire, l'angle que fait avec le méridien, le vertical dans lequel se trouve cet astre au moment de l'observation; trouver la latitude* (fig. 35).

SOLUTION.

Il est visible qu'au triangle PZS, on connoît le côté PS & le côté ZS avec l'angle PZS opposé au côté PS. Donc pour avoir le côté ZP, suivant la Table pour les triangles sphériques obliquangles, on abaissera du sommet de l'angle S un arc SR perpendiculaire au côté inconnu, & l'on aura 1°. $tang\, RZ = \frac{cos\, PZS \times tang\, ZS}{R}$, 2°. $cos\, PR = \frac{cos\, RZ \times cos\, PS}{cos\, ZS}$.

Si donc on suppose la déclinaison du soleil de 18° 30′, sa hauteur sur l'horizon de 52° 35, & l'angle du vertical PZS de 134° 36′ 7″, on trouvera le côté ZS comme il suit.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

1°. 9,846448 = *log. cos.* 134° 36′ 7″
9,883672 = *log. tang.* 37° 25′ 0″

9,730120 *log. tang.* 28° 14′ 37″ = RZ

2°. 9,944948 = *log. cos.* . . 28° 14′ 37″
9,501476 = *log. sin.* . . 18° 30′
0,100049 = *comp. ar. log. sin.* 52° 35′

9,546473 = *log. cos.* RP = 69° 23′ 38″

ôtant donc 28° 14′ 37″, 7 de 69° 23′ 38″ 0, on trouvera pour le côté ZS complément de la latitude 41° 9′, & par conséquent la latitude est de 48° 51′.

SCHOLIE.

Il est facile de voir que de ces six choses la latitude, la hauteur du soleil, sa déclinaison, l'angle horaire, l'angle azimutal & l'angle au soleil, trois étant données, comme l'on voudra, les trois autres seront nécessairement connues par les regles de la Trigonométrie ; ainsi l'on ne s'arrêtera pas davantage à détailler les différents cas qui résultent de ces combinaisons.

PROBLEME XIV.

321. *La longitude & la latitude d'une étoile étant donnée ; trouver sa déclinaison* (fig. 36).

SOLUTION.

Supposons la longitude de l'étoile de 198° 27′ & sa latitude boréale de 31° 2′; il est visible que dans le triangle PKS, on connoît le côté PK égal à l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′ 30″. Le côté KS égal au complément de la latitude de 58° 58′; & l'angle PKS égal à la longitude de l'étoile moins 90°; & c'est le côté PS qu'il faut trouver dont le complément sera la déclinaison demandée. Pour y parvenir, suivant ce que prescrit la Table générale des triangles obliquangles; d'un des angles inconnus S, on abaissera un arc SR perpendiculaire au côté PK, & qui tombera au-dehors de l'angle S, à cause que l'angle PKS est obtus; l'arc KR sera celui que nous avons nommé premier segment, lequel joint avec PK

donnera le second segment PR ; & l'on l'on aura

$$1^{\circ}.\ tang\ KR = \frac{cos\ PKS \times tang\ KS}{R},$$

$$\&\ cos\ PS\ ou\ sin\ DS = \frac{cos\ KS \times cos\ PR}{cos\ KR}.$$

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

1°. *9,500342* = *log. cos.* PKS = 108° 27′ 0″
0,220654 = *log. tang.* KS = 58° 58′ 0″

9,720996 = *log. tang.* KR = 27° 44′ 41″
donc PR = 51° 13′ 11″

2°. *9,712260* = *log. cos.* KS
9,796804 = *log. cos.* PR
0,054042 = *comp. ar. log. cos.* KR

9,563106 = *log. sin.* 21° 26′ 58″ = DS qui est la déclinaison demandée.

PROBLEME XV.

322. *Supposant les mêmes données qu'au Problême précédent ; trouver l'ascension droite de la même étoile , & l'angle du cercle de latitude avec le cercle de délinaison qui passent par la même étoile* (fig. 36).

SOLUTION.

On voit par l'énoncé du Problême qu'au triangle PKS, on connoît toujours deux côtés & l'angle compris; & de plus que l'ascension droite de l'étoile se détermine par l'angle KPS, en ôtant cet angle de 270°. Pour trouver l'angle à l'étoile en même temps, nous ferons usage des formules de NEPER.

On voit par la troisieme Table que les formules qui conviennent au cas présent , sont les deux analogies suivantes.

1°, *Le sinus de la demi-somme des côtés* PK *&* KS *est à celui de leur demi-différence , comme la cotangente de la moitié de l'angle compris est à la tangente de la demi-différence des angles sur la base.*

2°, *Le cosinus de la demi-somme des mêmes côtés est au*

cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris PKS *est à la tangente de la demi-somme des angles sur cette même base.*

Opération par Logarithmes.

23° 28′ 30″	58° 58′ 0″
58° 58′ 0″	23° 28′ 30″
82° 26′ 30″	35° 29′ 30″
41° 13′ 15″ demi-somme.	17° 44′ 45″ demi-différence.

108° 27′ 0″

54° 13′ 30″ demi-angle dont le complément est de 35° 46′ 30″.

9,484008 = *log. sin.* 17° 44′ 45″	9,978827 = *log. cos.* 17° 44′ 45″
9,857670 = *log. tang.* 35° 46′ 30″	9,857670 = *log. tang.* 35° 46′ 30″
0,181139 = *c. a. l. sin.* 41° 13′ 15″	0,123682 = *c. a. l. cos.* 41° 13′ 15″
9,522817 = *log. sin.* 18° 25′ 36″	9,960179 = *log. sin.* 42° 22′ 36″

La demi-somme des angles en P & en S est donc 42° 22′ 36″, & la demi-différence des mêmes angles de 18° 25′ 56″; donc l'angle KPS sera de 60° 48′ 32″, ce qui donne pour l'ascension droite de l'étoile 209° 11′ 28″, & l'angle à l'étoile sera de 23° 56′ 40″. *C. Q. F. T.*

Scholie.

323. Les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles sont d'un très-grand usage dans l'Astronomie, ainsi que leurs longitudes & leurs latitudes. Les unes & les autres servent à déterminer les positions respectives des astres, & à en dresser les catalogues nécessaires pour comparer les mouvements des Planetes, & des Cometes qu'on apperçoit de temps en temps. On employe néanmoins de préférence les longitudes & les latitudes des étoiles; parce que l'on a cru pendant long temps que ces éléments ne souffroient aucun changement, sur-tout, lorsqu'on a soin de compter les longitudes à commencer d'une étoile fixe; tandis que la précession des équinoxes

change considérablement l'ascension droite & la déclinaison. Au reste, il est aisé de voir que les éléments de la Théorie des étoiles peuvent se déduire les uns des autres, suivant un très-grand nombre de combinaisons qu'il n'est pas de mon objet de détailler ici. Les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles peuvent servir, comme celles du soleil, à déterminer les latitudes terrestres; on peut en déduire les amplitudes orientales ou occidentales de ces astres ou de ceux qui auroient les mêmes positions dans la sphere. Elles font connoître celles qui sont de perpétuelle apparition sur l'horizon pour un latitude donnée. On connoît encore par leur moyen de combien de temps une étoile suit ou précede le passage du soleil au méridien; ce qui fait connoître leurs levers ou leurs couchers héliaques, c'est-à-dire, les saisons de l'année où elles doivent commencer ou cesser de paroître à cause de l'éclat du soleil. Les moyens les plus simples que l'on employe pour déterminer les positions des étoiles, se réduisent à observer leurs hauteurs méridiennes & l'instant de leur passage au mériden, d'où l'on déduit tout de suite leur ascension droite & leurs déclinaison, avec lesquelles on conclut aisément leurs longitudes & latitudes par l'inverse des Problêmes qu'on vient de résoudre.

PROBLEME XVI.

324. *Connoissant le lieu du soleil dans l'écliptique; l'heure qu'il est avec la latitude de l'observateur; la hauteur d'un astre, & l'angle que fait son vertical avec le méridien; trouver la déclinaison de cet astre & son ascension droite* (fig. 35).

SOLUTION.

Supposons que le lieu du soleil soit 18° 24′ du taureau, qu'il est 9 heures 20 minutes du soir; que la hauteur de l'astre dans son vertical est de 43° 15′ sur l'horizon; l'angle de son vertical avec le méridien dans

la partie orientale ſud eſt de 47° 24′, & la latitude du lieu de 48° 51′; il s'agit de trouver l'arc DS qui exprime la déclinaiſon de l'aſtre & la diſtance du point D au premier point d'Ariès. Il eſt viſible qu'au triangle PZS, on connoît les deux côtés PZ & ZS avec l'angle qu'ils comprennent. On cherchera d'abord la déclinaiſon par le côté PS, en abaiſſant un arc perpendiculaire SR du ſommet de l'angle S ſur le côté PZ, & l'on aura les formules ſuivantes par la Table des triangles obliquangles, pour trouver le côté PS.

1°. *Tang* RZ = *coſ* PZS × *tang* ZS.

2°. *Coſ* PS ou *ſin* DS = $\frac{coſ\ ZS \times coſ\ PR}{coſ\ RZ}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,830509 = *log. coſ.* PZS
0,026546 = *log. tang.* ZS
9,857055 = *l. tang.* RZ = 35° 44′ 11″

9,835807 = *log. coſ.* ZS
9,593900 = *log. coſ.* PR
0,090598 = *comp. ar. log. coſ.* RZ
9.520305 = *l. ſin.* 19° 21′ 5″ = DS,

ainſi la déclinaiſon de l'aſtre eſt de 19° 21′ 5″.

Préſentement, pour avoir l'aſcenſion droite, on commencera par chercher l'angle horaire ZPS par l'analogie ordinaire entre les ſinus des côtés & ceux des angles oppoſés, ce qui donnera *ſin* ZPS = $\frac{ſin\ PZS \times ſin\ ZS}{ſin\ PS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,866935 = *log. ſin.* PZS = . . . 132° 36′
9,862353 = *log. ſin.* ZS = . . . 46° 45′ 0″
0,025257 = *comp. ar. log. ſin.* PS = 70° 38′ 55″
9,754545 = *log. ſin.* ZPS = . . . 34° 37′ 43″

D'ailleurs en réduiſant l'heure donnée 9 heures 20 minutes parties de l'équateur, on trouve que le ſoleil eſt éloigné du méridien de 140° 0′ 0″; enfin, parce que l'aſcenſion droite du ſoleil, lorſqu'il eſt dans 18° 24′ du taureau, eſt de 45° 55″ 58″ (n°. 302). Si l'on ajoute

ensemble ces trois arcs, on aura l'ascension droite de l'astre de 220° 33′ 41″.

Si l'on veut savoir l'heure du passage de l'étoile par le méridien, il n'y a qu'à réduire l'arc 34° 37′ 43″ en parties de temps, & l'on trouvera qu'il répond à 2 heures 18 minutes 31 secondes; ajoutant cette heure à 9^h 20^m, on trouvera que l'astre a dû passer au méridien à 11^h 38^m 31″ du soir.

PROBLEME XVII.

325. *Connoissant les ascensions droites & déclinaisons de deux étoiles fixes observées dans un même vertical ou azimuth aussi donné de position avec leur distance, ou l'arc de grand cercle compris entre ces étoiles; trouver la latitude de l'observateur* (fig. 37).

Par les données du Problême, il est visible que les trois côtés du triangle PS*s* sont donnés, ainsi que l'angle en P; puisque les arcs PS, P*s* sont les compléments de la déclinaison de chaque étoile, connue par l'hypotese. La distance S*s* est aussi donnée, & enfin l'angle SP*s* est mesuré par la différence d'ascension droite, donc on aura $\sin Ss : \sin SPs :: \sin sP : \sin PSZ = \frac{\sin sP \times \sin SPs}{\sin Ss}$.
De plus au triangle PZS, on connoît actuellement deux angles & l'un des côtés opposés à ces angles: savoir, l'angle de l'azimut PZS, & l'angle PSZ avec le côté PS; donc on aura $\sin PZS : \sin PSZ :: \sin PS : \sin PZ$, ou en mettant pour sinus de PSZ sa valeur, & ôtant la fraction $\sin PZS \times \sin Ss : \sin sP \times \sin SPs :: \sin PS : \sin PZ$.

Supposons, pour appliquer cette solution à un exemple particulier, que la distance S*s* est de 28° 30′; l'ascension droite de S de 78° 24′, & sa déclinaison 27° 25′; que l'ascension droite de *s* est de 104° 52′, & sa déclinaison 12° 18′; enfin que l'angle azimutal AZK est de 73° 36′: l'angle SP*s* sera de 26° 28′; l'arc PS sera

de 62° 35′, & l'arc P*s* de 77° 42′. Cela posé, il sera facile de trouver la valeur de PZ.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,948257	*log. sin.*	62° 35′ 0″	= PS
9,989915	*log. sin.*	77° 42′ 0″	= *s*P
9,649020	*log. sin.*	26° 28′ 0″	= SP*s*
0,018039	*comp. ar. log. sin.*	73° 36′ 0″	= PZS
0,321337	*comp. ar. log. sin.*	28° 30′ 0″	= S*s*

9,926568 *log. sin.* 57° 36′ 42″ complément de la latitude.

326. COROLLAIRE I. Il est visible que l'on peut actuellement trouver l'angle horaire ZPS ; & partant si l'on connoît le lieu du soleil & son ascension droite, sa différence d'avec celle de l'étoile sera connue. Otant encore de cette différence l'arc AD, restera l'arc de l'équateur compris entre le méridien du lieu, & celui qui passe par le soleil, d'où l'on déduira le moment de l'observation : il n'est pas moins évident que l'on peut aussi connoître, en poursuivant ce calcul, la hauteur de chaque étoile à l'instant où elles ont été observées.

327. COROLLAIRE II. Si au lieu de donner l'azimut des étoiles, on avoit la hauteur de l'une d'elles : il est visible que par un calcul à peu près semblable, on trouveroit la hauteur du pole, car on connoît toujours les trois côtés du triangle PS*s* avec l'angle P ; ainsi l'on auroit l'angle PSZ qui se trouve compris entre les deux côtés connus du triangle PZS.

328. COROLLAIRE III. Si l'on connoît, outre les déclinaisons & ascensions droites des étoiles observées dans un même vertical, l'angle horaire ZPS, on aura encore la latitude du lieu ; puisque dans le triangle PSZ, on connoîtra alors deux angles sur le côté PS, aussi connu par la supposition.

329. COROLLAIRE IV. De même encore, si l'on a la distance des étoiles & leurs déclinaisons avec la hau-

teur de l'une des deux, on trouvera tout le reste comme dans le Problême actuel. On voit par-là, combien il est utile d'avoir de bonnes Tables des étoiles avec leurs déclinaisons & ascensions droites, distances, longitudes & latitudes, puisqu'elles peuvent servir à donner les latitudes avec une très-grande facilité, sans même que l'on ait besoin de grands instruments, un fil à plomb étant suffisant pour observer si deux étoiles sont dans un même vertical.

PROBLEME XVIII.

326. *Connoissant les latitudes & longitudes de deux points placés sur le Globe terrestre ; trouver leur distance itinéraire, ou, ce qui revient au même, l'arc de cercle compris entre ces deux lieux* (fig. 37).

Supposons présentement que les points S, *s* désignent les lieux proposés : il est visible que dans le triangle SP*s*, on connoit, suivant l'énoncé du problême, les deux côtés SP, *s*P compléments des latitudes avec l'angle P différence des longitudes; donc on aura le côté S*s* par le troisieme cas de la table des triangles obliquangles. Après quoi l'on n'aura plus qu'à réduire le nombre de degrés, minutes & secondes en lieues, à raison de 25 au degré.

PROBLEME XIX.

327. *Connoissant les latitudes de deux Villes & leurs distances ; trouver leur différence en longitude.*

On commenceta par réduire la distance donnée en degrés, minutes & secondes d'un grand cercle; au moyen de quoi l'on aura un triangle sphérique SP*s*, duquel on connoît les trois côtés ; ainsi l'on trouvera aisément l'angle P qui est mesuré par la différence des longitudes. *C. Q. F. T.*

Donc si la position d'une de ces deux Villes est déterminée ; l'autre le sera aussi, d'autant plus exactement que la distance donnée sera mesurée ou donnée avec plus de

précision. Réciproquement, si l'on connoît la différence des longitudes la distance & la latitude d'un point du Globe, on aura aussi la latitude de l'autre point; mais rarement on se sert de ce cette méthode, parce qu'il y a une infinité de meilleurs manieres de trouver la latitude, comme on a pu s'en convaincre aisément par ce qui précede.

Ces Problêmes renfermant à peu près tous les cas des triangles sphériques rectangles ou obliquangles, suffisent pour indiquer comment il faut s'y prendre, pour trouver les solutions numériques des différents problêmes de Trigonométrie, par le moyen des regles démontrées dans les Chapitres précédents. Je ne me suis proposé autre chose ici que de donner quelques exemples en nombres ; c'est pourquoi je n'ai point fait entrer dans ces problêmes les différentes modifications dont les données peuvent être susceptibles par la parallaxe, la réfraction, l'abberration de la lumiere, ou la nutation de l'axe de la terre. Ces Théories ne peuvent entrer que dans un Traité complet d'Astronomie. Il me suffit d'avoir donné dans cet Ouvrage les moyens de résoudre toutes les difficultés relatives à la Trigonométrie, & que l'on peut rencontrer dans l'étude de cette science, qui devient d'autant plus épineuse que l'on veut apprécier tous les phénomenes avec plus de rigueur & d'exactitude.

FIN.

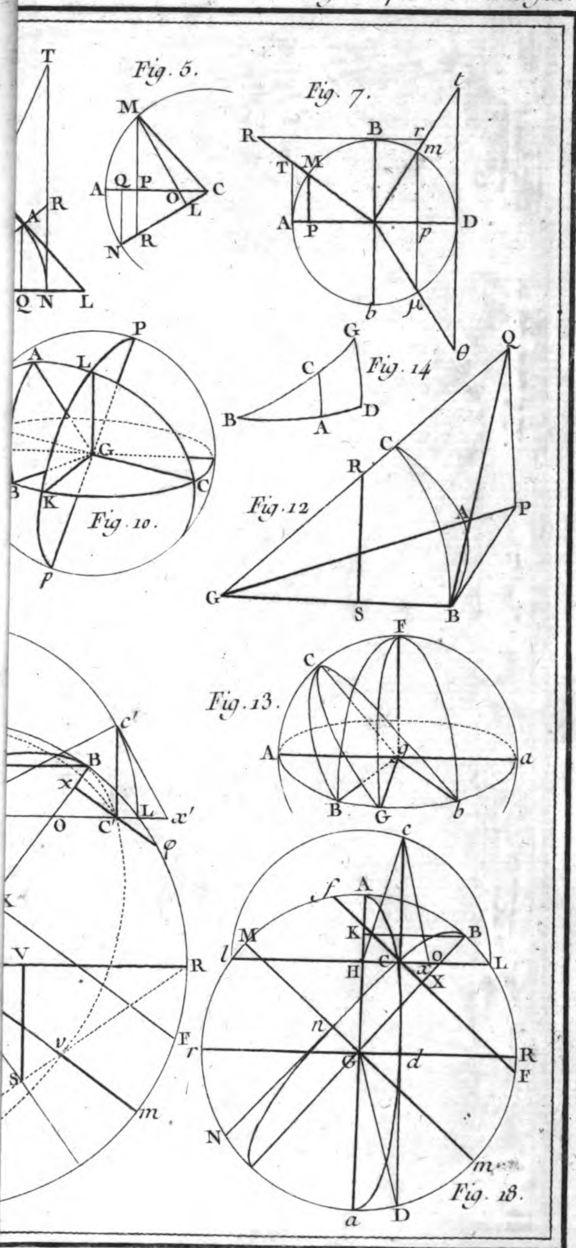

Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 14
Fig. 10.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 18.

Fig. 21.
A
v
P
φ'
ε
δ
η
η'
F
K
B
ω
C
H
O
L
μ
Y
X
Q
n
d
G
f
R
f
Z
ζ
θ
m
σ
φ
l
λ
D
y
a
f
Fig. 24.
F
L
f
D
B
C
A
d
f
F
L
B
d
C
D
A
Fig. 25.
F
f
φ
A
Fig. 28
b
β
C
B
c
y
Z
P
Fig. 31.
S

Fig. 34

Fig. 35.

Fig. 37.

TABLE DES MATIERES.

FIN DE LA TABLE DES MATIERES.

Fautes à corriger.

PAGE 45 n°. *96. tang.* ($\frac{1}{2}$ A $\frac{1}{2}$ B) *lisez ; tang.* ($\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$B).
Page 81, *lig.* 1, demi-somme des côtés : *lisez ;* demi-somme des angles.
Page 94, *lig.* 14, au lieu des points C, c' *: lisez ;* C, C'.
Ibid. 9 lignes plus bas, détermineroit *: lisez ;* détermineront.
Page 168, *vers le bas, au lieu de* M, N, O *: lisez ;* M, O, N.
Page 169, *lig.* 9, lorsqu'elle surpassera : *lisez ;* lorsqu'elle sera moindre.

